LGMA10 / L9MA10 2016-06-07

Preliminär delen

P.1. $(2016)_{10} = 3\cdot 625 + 125 + 3\cdot 5 + 1 = 1875 + 125 + 15 + 1 \quad (5^0 = 1,\ 5^2 = 25,\ 5^3 = 125,\ 5^4 = 625)$

$= (31031)_5$

P.2. Utför divisionen, t.ex med trappa eller liggande stol

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{1}{r}{1550816} & \\
\hline
20160608 & 13 \\
-13 & \\
\hline
71 & \\
-65 & \\
\hline
66 & \\
-65 & \\
\hline
10 & \\
-00 & \\
\hline
106 & \\
-104 & \\
\hline
20 & \\
-13 & \\
\hline
78 & \\
-78 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Så $\dfrac{20160608}{13} = 1550816$

$13\cdot 1 = 13$
$13\cdot 2 = 26$
$13\cdot 3 = 39$
$13\cdot 4 = 52$
$13\cdot 5 = 65$
$13\cdot 6 = 78$
$13\cdot 7 = 91$
$13\cdot 8 = 104$

P.3. $\dfrac{(x^4 - 16)}{(x+2)(x^3-8)} = \dfrac{(x^2 \cancel{-} 4)(x^2+4)}{\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)} = \dfrac{x^2+4}{(x+2)^2}$

OBS: I ett bråk kan man förkorta faktorer från nämnaren & täljare, inte termer i summor.

P.4. $\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}} = \left(x \cdot x^{1/3} \cdot (x^{1/2})^{1/3}\right)^{1/2} = x^{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)}$

$= x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{6}} = x^{3/4}$

eller skriv $= x^{1/2} \cdot x^{1/6} \cdot x^{1/12} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}} = x^{9/12} = x^{3/4}$

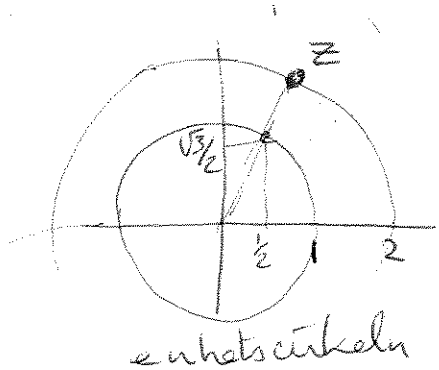
G - frågor

G 1 a) Påståendet innebär att man kan dela varje x med varje y och hitta ett $z = \frac{x}{y}$
(dvs ett z sådan att $y \cdot z = x$)
Det stämmer för $y \neq 0$, inte för alla y:

$$\forall x \ \forall y,\ y \neq 0 \Rightarrow (\exists z : y \cdot z = x)$$

b) Låt $z = 1 + i\sqrt{3}$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$



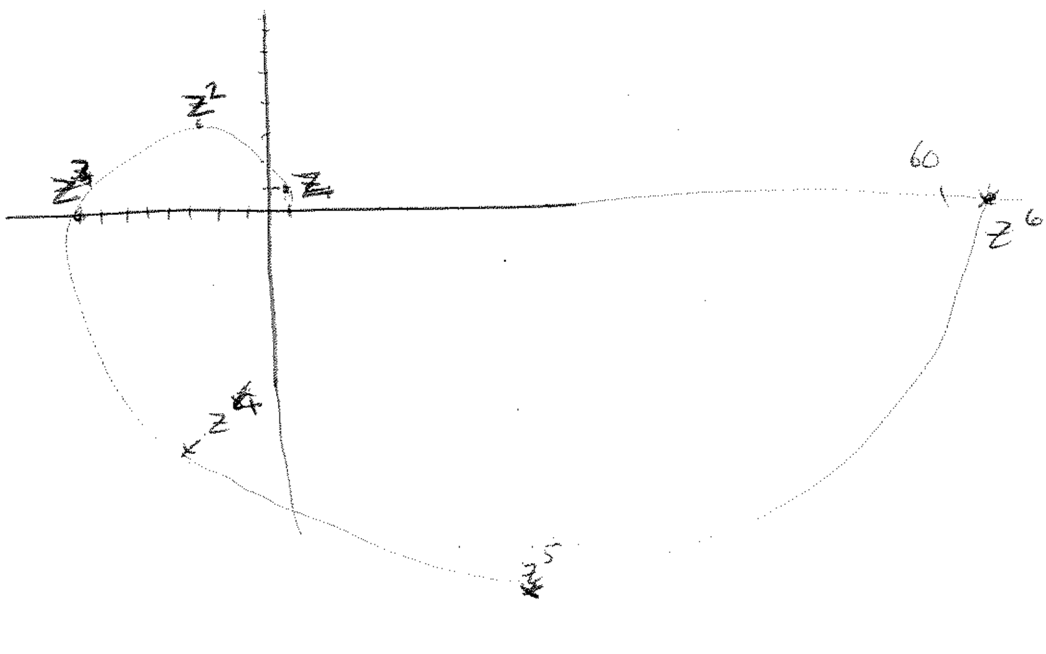
$$z^2 = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z^3 = 8\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -8$$

$$z^4 = 16\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$z^5 = 32\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$z^6 = 64\left(\cos 2\pi + i\sin 2\pi\right) = 64$$



G-1 c) : $f(x) = 3x$ Defmängd $\mathbb{R}$, värdemängd $\mathbb{R}$

invers : $f^{-1}(y) = \frac{1}{3} y$

$g(x) = x + 5$ Defmängd $\mathbb{R}$, värdemängd $\mathbb{R}$

invers : $g^{-1}(y) = y - 5$

$h(x) = x^2$ Defmängd $\mathbb{R}^+$, värdemängd $\mathbb{R}^+$

invers : $g^{-1}(y) = \sqrt{y}$

Andra bra exempel var :

$f(x) = x$, med inversfunktion $f^{-1}(y) = y$

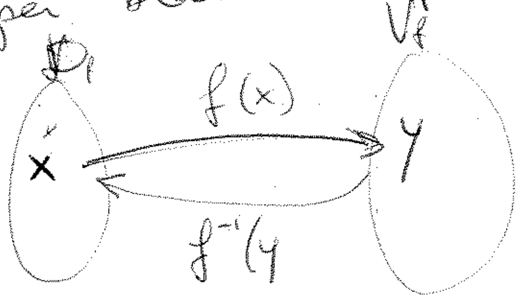
$\mathcal{D}_f = V_f = \mathbb{R}$

$f(x) = x^3$ $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$

$\mathcal{D}_f = V_f = \mathbb{R}$

OBS : Det är tydligare om man uttrycker inversfunktionen med ett annat variabelnamn än själva funktionen så man slipper blanda ihop variablerna.

tänk



OBSOBS : Blanda inte ihop

$-f$: $f(x) + (-f(x)) = 0$ addition

$\frac{1}{f}$: $\frac{1}{f(x)} \cdot f(x) = 1$ multiplikation, betecknas ibland också med $(\,)^{-1}$

f^{-1} : $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x$. funktionens invers.

G - 2 : Induktionsbevis :

(0,5p) Basfall för $n=10$ $\left.\begin{array}{l} 2^{10} = 1024 \\ 10^3 = 1000 \end{array}\right\}$ så $2^{10} > 10^3$.

(0,5p) Induktionsantagande : Anta att för något $k \geq 10$,
så är $2^k \geq k^3$

(0,5p) Induktionssteg : Vi skall visa att även $2^{k+1} \geq (k+1)^3$

Vi har $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k = 2^k + 2^k$

och $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$

så vi använder att $2^k \geq k^3$

och har kvar att visa att $2^k \geq 3k^2 + 3k + 1$

(1p) Men $3k^2 + 3k + 1 < 7k^2$ eftersom $k \geq 10$

Så $2^k \geq k^3 > 9k^2 > 3k^2 + 3k + 1$.

och därmed $2^{k+1} = 2^k + 2^k \geq k^3 + k^3 > \underbrace{k^3 + 3k^2 + 3k + 1}_{=(k+1)^3}$

(0,5p) Slutsats Vi har visat att för varje heltal $n \geq 10$,
så är $2^{n+1} \geq n^3$.

II

(1p) för tydliggörande av strukturen för induktionsbevis.

G - 3. Vi använde Euklides algoritm.

$$299 = 91 \cdot 3 + 26 \qquad 3 \cdot 91 = 273$$

$$91 = 26 \cdot 3 + 13 \qquad 3 \cdot 26 = 78$$

$$26 = 13 \cdot 2 + 0$$

(2p) så $SGD(299, 91) = 13$

Vi får en kombination $299u + 91v = 13$ m.h.a

$$13 = 91 - (26 \cdot 3)$$

$$= 91 - ((299 - 91 \cdot 3) \cdot 3) \qquad \text{ty } 26 = 299 - 91 \cdot 3$$

$$= 91 - 299 \cdot 3 + 91 \cdot 9$$

$$= 91 \cdot 10 - 299 \cdot 3$$

(1p) $= 299 \cdot (-3) + 91 \cdot 10$ med $(u_0, v_0) = (-3, 10)$

(kolla rimlighet: $299 \cdot 3 = 900 - 3$, $91 \cdot 10 = 910$

De andra paren (u, v) fås med hjälp av (u_0, v_0):

OBS att eftersom $7 \cdot 13 = 91$ och $23 \cdot 13 = 299$ kan vi förkorta ekvationen till

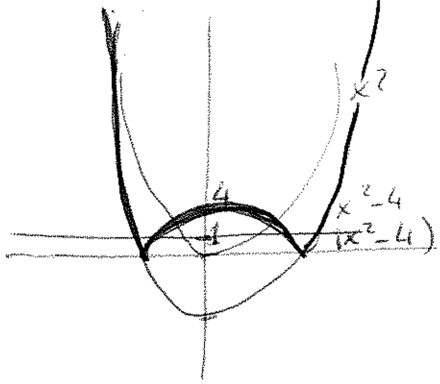
$$1 = 23 \cdot (-3) + 7 \cdot (10)$$

och få alla andra par $(u, v) = (-3 + 7k, 10 - 23k)$

(1p) för $k \in \mathbb{Z}$.

(0,5) för lösningarna $(-3 + 91k, 10 - 299k)$.

G-4. Skiss på $|x^2-4|$



Så olikheten gäller i två område, vars gränser är där $|x^2-4| = 1$

(2p totalt)

(1p för delen)

dvs $x^2-4=1$ eller $x^2-4=-1$

dvs $x^2 = 5$ | dvs $x^2 = 3$

dvs $x = \pm\sqrt{5}$ | dvs $x = \pm\sqrt{3}$

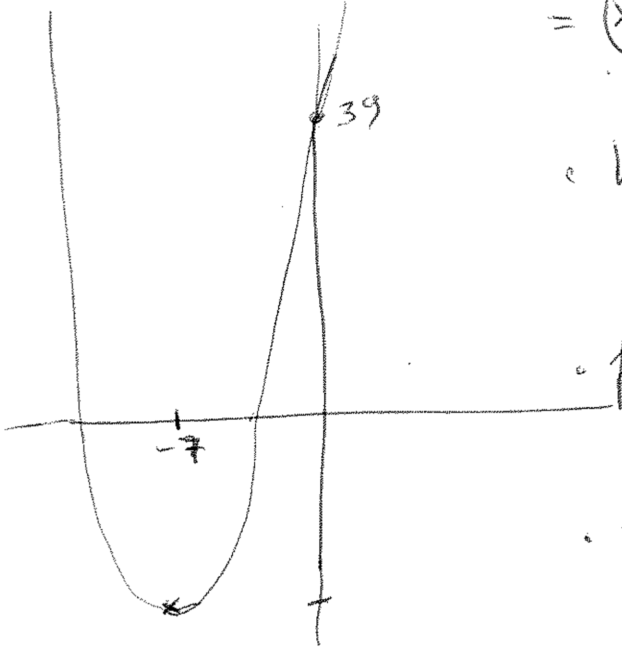
så $|x^2-4| \le 1$ för $x \in [-\sqrt{5}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \sqrt{5}]$

G-5. (1p)

$$f(x) = x^2+14x+39$$
$$=(x+7)^2-10 \quad \text{(kvadratkompletterad)}$$

(1p)

$$=(x+7-\sqrt{10})(x+7+\sqrt{10}) \quad \text{faktoriserad}$$
$$=(x-(-7+\sqrt{10}))(x-(-7-\sqrt{10}))$$



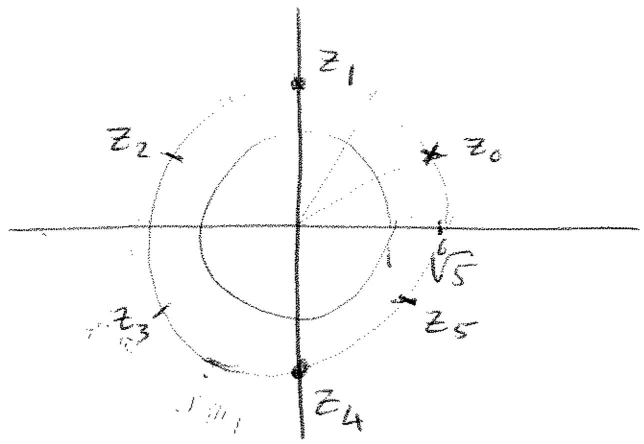
- kvadratkompletterad: lätt att skissa m.h.a min-punkten
- faktoriserad ger var kurvan skär x-axeln finns endast om f har reella nollställe
- x^2+px+q : lätt att se $f(0)$

VG-frågor.

<u>VG-1</u> $z^6 = -5 = 5\,(\cos \pi + i \sin \pi)$

ger $z_k = \sqrt[6]{5}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}\right)\right)$

för $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$



<u>VG-2</u> Vi vill ha n sammansatta tal i följd.

Låt $N = (n+1)!$

Då vet vi inte om $N+1$ är primtal, men

$N+2$	är	delbart	med	2
$N+3$	"	"	"	3
$N+4$	"	"	"	4
⋮			"	n
$N+n$	"	"	"	$n+1$
$N+n+1$	"	"		

så vi har n st tal i rad, alla sammansatta.