MATEMATIK, Göteborgs universitet

Lösningar på omtentamen Aritmetik och algebra 7,5hp LGMA10, L9MA10, VT16, Laura Fainsilber

2016-08-19

Hjälpmedel: inga hjälpmedel. Telefonvakt: Raad Salman, tel.x5325

Förklara hur du resonerar och räknar. Poäng ges inte för bara svaren, utan för kvalité och förklaring av lösningarna.

- **Preliminär del:** (8p)

  1. Förenkla
  $$\frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[3]{a}} = a^{3/4-1/3} = a^{5/12} = \sqrt[12]{a^5}$$
  (2p)

  2. Räkna ut $S(n) = \sum_{k=0}^{n} i^k$ för $n = 1, 2, 3, 4, 5$, där i är det komplexa talet med $i^2 = -1$. Beskriv vad summan blir för större heltal n. (2p)

     Vi får $S(1) = 1+i$, $S(2) = 1+i-1 = i$, $S(3) = i-i = 0$, $S(4) = 1$, $S(5) = 1+i$ och sedan upprepas dessa värden i en cykel av längd 4, så $S(n) = 1, 1+i, i,$ eller 0 beroende på värdet av n mod 4.

  3. Skriv talet 2016 i det binära talsystemet. (2p)

     $2016 = 11111100000_2$ ty $2016 = 1024+512+256+128+64+32+0+0+0+0+0$ eller genom att halvera 5 gånger tills man får $63 = 111111$.

  4. Vad menas med följande utsaga om en funktion f av en reell variabel?
  $$\forall x, \forall y,\ (y > x) \Rightarrow (f(y) < f(x))$$
  (2p)

     Funktionen f är (strängt) avtagande.

- **Frågor för betyget G (och VG):** (20p)

  1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Bladet lämnas in tillsammans med övriga lösningar. (6p)

  2. Bestäm entalssiffran i talet 2^{2016}. (3p)

     Entalssiffran för de successiva tvåpotenserna är $1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, \ldots$. Vi kan använda att 2^5 har entalssiffra 2 (dvs är kongruent med 2 modulo 10).

     $2^{2016} \equiv 2^{5\cdot 400+5\cdot 3+1} \equiv 2^{400} \cdot 2^3 \cdot 2 \equiv 2^{5\cdot 5\cdot 16} \cdot 8 \cdot 2 \equiv 2^{16} \cdot 16 \equiv 2^3 \cdot 2 \cdot 6 \equiv 8 \cdot 2 \equiv 6.$

  3. Skissa en graf för funktionen $f(x) = |(x-1)(x+5)|$ och lös olikheten $f(x) \geq 5$. (4p)

     Grafen är absolutbeloppet av en parabel, som studsar på x-axeln i $x = -5$ och $x = 1$. Dra ett horisontellt sträck vid $y = 5$ för att jämföra kurvan med sträcket och se för vilka värden av x som kurvan ligger ovanför sträcket. Kurvan möter sträcket där $f(x) = 5$, dvs $(x-1)(x+5) = 5$ eller $(x-1)(x+5) = -5$

Vi löser båda ekvationer: $(x-1)(x+5) = 5$ omm $x^2+4x-5 = 5$ omm $x^2+4x-10 = 0$ omm $x = -2 \pm \sqrt{14}$.

$(x-1)(x+5) = -5$ omm $x^2 + 4x - 5 = -5$ omm $x^2 + 4x = 0$ omm $x = 0$ eller $x = -4$.

Så olikheten gäller för $x \leq -2 - \sqrt{14}$, för x mellan -4 och 0 (inkl. ändpunkter) och för $x \geq -2 + \sqrt{14}$.

4. För vilka positiva heltal n är polynomet $x^n + 1$ delbart med polynomet $x + 1$? (3p)

   (Tips: använd faktorsatsen!)

   Enligt faktorsatsen är $x^n + 1$ delbart med polynomet $x + 1$ om och endast om -1 är ett nollställe för $x^n + 1$, dvs omm $(-1)^n = -1$, dvs omm n är ett udda tal.

5. Bevisa att $\sqrt{3}$ inte är ett rationellt tal. (4p)

   Se sats 2.20 sidan 69 i Vretblads bok, och ersätt 2 med 3.

- **Frågor för betyget VG:** (10p)

  1. Låt $P(x)$ vara ett polynom. Om det divideras med $x - 1$ blir resten 1 och om det divideras med $x - 2$ blir resten 2. Vilken rest får man när man dividerar $P(x)$ med $(x - 1)(x - 2)$? (5p)

     Enligt faktorsatsen vet man att $P(1) = 1$ och $P(2) = 2$. Kalla resten (ett linjärt polynom) för $R(x)$. Då måste även $R(1) = 1$ och $R(2) = 2$, så $R(x) = x$.

  2. Talen z_1, z_2 och z_3 ligger på enhetscirkeln i det komplexa planet och dessutom är $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Visa att talen utgör hörnen i en liksidig triangel. (5p)

     Gör en liten skiss med enhetscirkeln för att visualisera de tre punkterna. Eftersom punkterna har absolutbelopp 1 så motsvarar multiplikation eller division med ett av de en rotation på enhetscirkeln. Det påverkar inte huruvida de tre punkter bildar en liksidig triangel, bara roterar triangeln. Vi delar alla tal med z_3 och får då två punkter z_1' och z_2' med villkoret att $z_1' + z_2' + 1 = 0$. Detta innebär att $Imz_1' = -Imz_2'$, och de enda punkter som uppfyller detta på cirkeln har $z_2' = -z_1'$ eller $z_2' = \bar{z_1'}$ och $Rez_1' + Rez_2' = 1$ ger $z_2' = \bar{z_1'}$ och $Rez_1' = Rez_2' = 1/2$. Så z_1' och z_2' är punkterna med argument $\pm 2\pi/3$, som formar en liksidig triangel med punkten 1.

Anonym kod	Tentamen LGMA10/L9MA10	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall svar anges på anvisad plats

   (a) Ge exempel på följande. Glöm inte ange definitionsmängd och målmängd. (2p)

      i. En funktion som är surjektiv men inte injektiv.
      .Till ex. $f(x) = x(x-1)(x-2)$ (kubisk funktion med tre nollställe), från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$

      ii. En funktion som är injektiv men inte surjektiv.
      .Till ex.$g(x) = e^x$, från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$

      iii. En funktion som är både surjektiv och injektiv.
      .Till ex. $h(x) = 3x + 1$, från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$

      iv. En funktion som är varken surjektiv eller injektiv.
      ..Till ex. $k(x) = x^2$, från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$

   . . . .

   (b) (2p)

   Tolka följande olikhet geometriskt, där z är ett komplext tal: $2 < |z - i| \leq 3$.

   Svar: Det är en disk med radie 3 runt punkten i, med ett hål av radie 2 i mitten. Den yttre kanten ingår men inte den inre (Skissa gärna en figur!)

   . . . .

   (c) Illustrera och förklara de Morgans lag för två mängder A och B: (2p)

$$(A \cap B)^* = A^* \cup B^*$$

   Svar: Rita en figur i stil med fig. 3 på s.48 i Vretblad. Lagen säger att området utanför snittet av mängderna (alltså de element som inte tillhör båda mängderna) är samma sak som området utanför den ena mängden, sammanfört med området utanför den andra mängden (dvs de element som tillhör komplementet av minst en av mängderna).