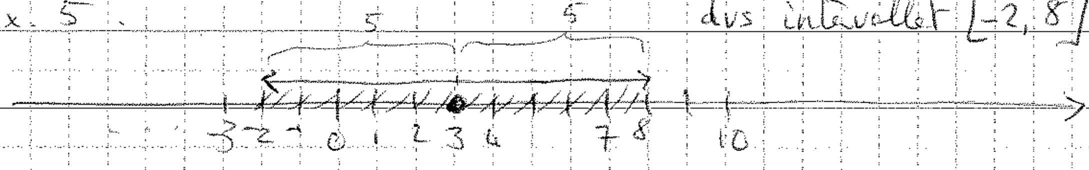
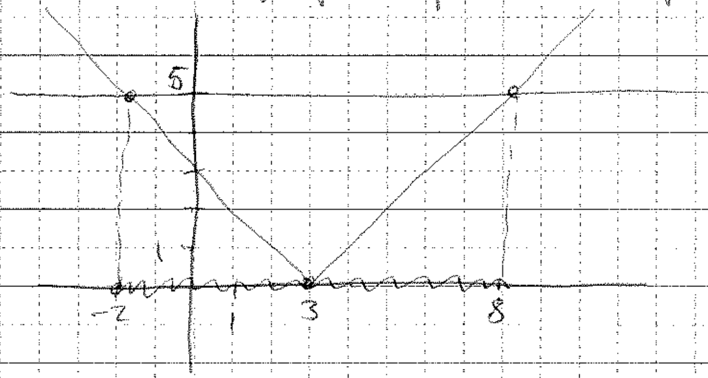
Aritmetik och Algebra 2017-03-10

(P1) - $|x-3| \leq 5$ kan t. ex lösas genom att man tittar på punkter på tallinjen vars avstånd till punkten 3 är max. 5. dvs intervallet $[-2, 8]$



Man kan även rita en Cartesisk graf för funktionen $|x-3|$ (grafen för $|x|$, förskuten 3 steg åt höger) och se vilka x-värden ger ett y-värde under 5 dvs intervallet $[-2, 8]$.



(P-2) $2017 = 1800 + 180 + 30 + 7$: <<< ||| <<< |||

$= 3 \cdot 600 + 3 \cdot 60 + 3 \cdot 10 + 7 \cdot 1$

(P-3) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \iff a \geq 0 \wedge b \geq 0 \wedge a+b = a+b+2\sqrt{ab}$

$\iff \sqrt{ab} = 0 \iff a = 0$ eller $b = 0$

så $(a, b) \in \{(0, b),\ b \in \mathbb{R}_+\} \cup \{(a, 0),\ a \in \mathbb{R}_+\}$

(P-4)

```
 3930,272...
 43233 |11
-33
 102
 -99
   33
  -33
   03,0
   -22
     80
    -77
      30
```

$\frac{43233}{11} = 3930,27\overline{27}\ldots$

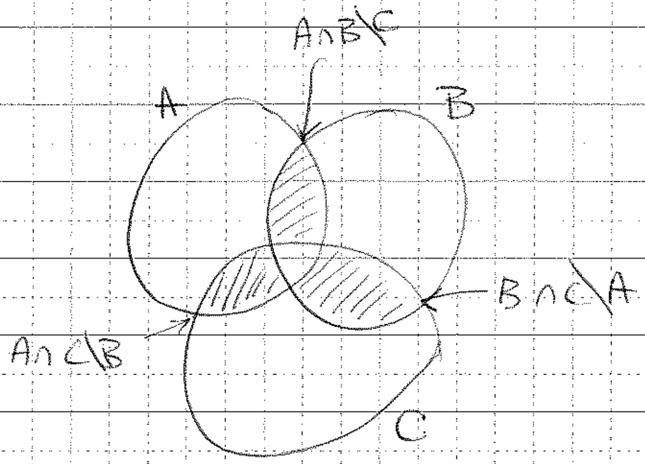
$x, y \in [1, 2)$

G 1 a) $\forall x, \exists y \quad y > x$ Sant, man kan t ex välja $y = \frac{x+2}{2}$ som ligger mellan x och 2.

- $\forall x, \forall y \quad y > x$ Falskt: vissa y är mindre än vissa x ex $x = 1{,}5$ med $y = 1$
- $\exists x \; \forall y \quad y \geq x$ Sant: tag $x = 1$, alla y i intervallet är större än eller lika med 1.
- $\exists x \; \forall y, \quad y < x$ Falskt Detta är nästan motsatsen av det första påståendet. Oavsett x finns y : $y \geq x$.

b) ex $P(x) = (x^2+1)^2 = (x+i)(x-i)(x+i)(x-i)$

c)



OBS! $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$ så man kan avstå från parenteserna.

(G-2) Skiss: $f(x)=x^5$ liknar grafen för x^3, fast brantare

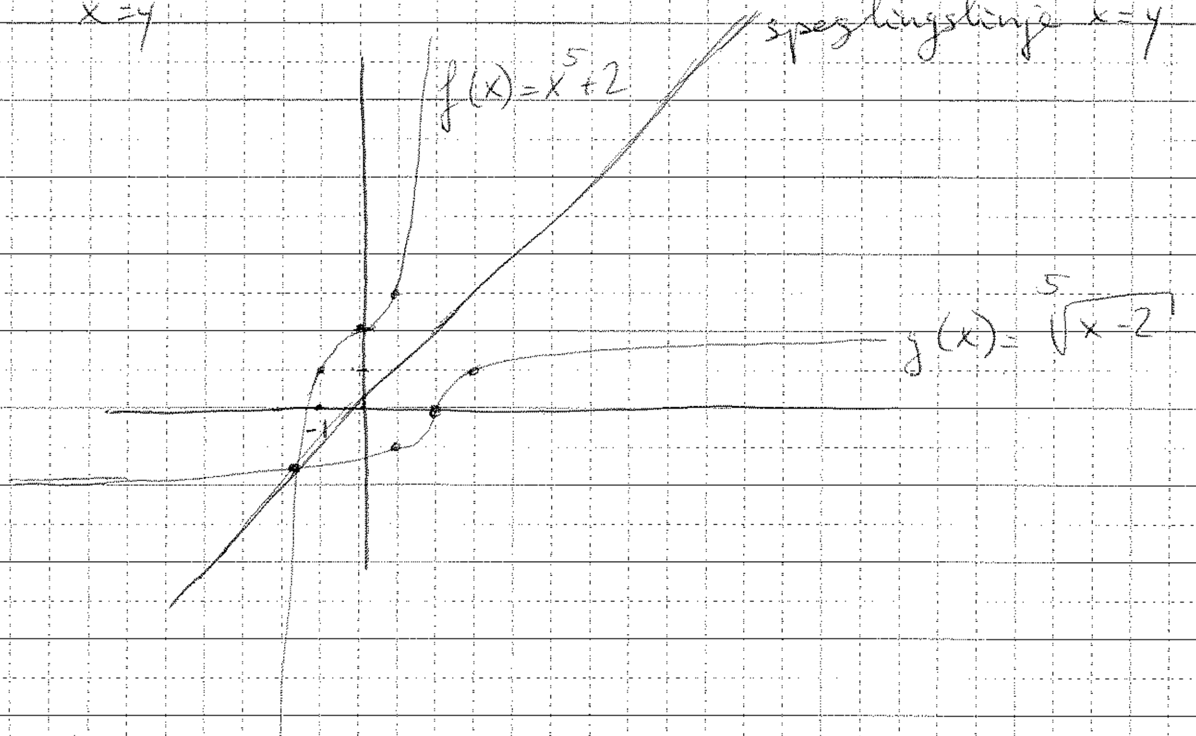
grafen för x^5+2 är förskuten uppåt 2 steg.

$g(x) = \sqrt[5]{x-2}$ är invers funktion till $f(x)=x^5+2$

$$g\left(x^5+2\right) = \sqrt[5]{x^5+2-2} = \sqrt[5]{x^5} = x.$$

så grafen är symmetrisk till grafen av x^5+2 m.a.p linjen

$x = y$



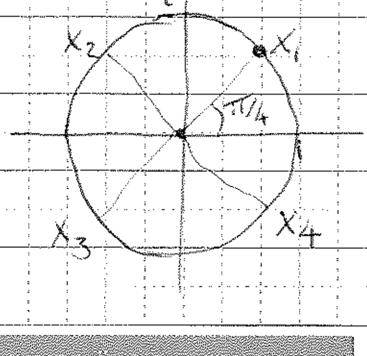
(G-3) $x^4+1=0 \iff x^4=-1$. 4 komplexa (icke reella) rötter

man kan tänka med polära koordinater

$|x^4|=1 \Rightarrow |x|=1$ så rötterna ligger på enhetscirkeln

$\arg(x^4) = \pi\ (3\pi, 5\pi, 7\pi)$ (samma vinkel uttryckt med olika antal varv)

ger $\arg(x) = \frac{1}{4}\arg(x^4)$, så vinklarna kan vara $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$



Man kan även faktorisera

$$x^4+1 = \left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$$

och lösa med pq formeln till

$$x_k = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad k=1,2,3,4.$$

G4

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

par av inverser: $1 \cdot 1 = 1$, $2 \cdot 4 = 1$, $3 \cdot 5 = 1$, $6 \cdot 6 = 1$.

G5 Påstående P_n: $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$

Vi skall visa med induktion att P_n gäller för alla $n \in \mathbb{N}$

Basfall $n=1$: $\sum_{k=0}^{1} 2^k = 2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3$ är vänsterledet

och $2^{1+1} - 1 = 4 - 1 = 3$ är högerledet.

Induktionsantagande: Antag att det finns ett tal p sådant att P_p gäller, dvs $\sum_{i=0}^{p} 2^i = 2^{p+1} - 1$

Induktionssteg: Vi vill visa att $P_p \Rightarrow P_{p+1}$.

$$\sum_{i=0}^{p+1} 2^i = \sum_{i=0}^{p} 2^i + 2^{p+1} = 2^{p+1} - 1 + 2^{p+1} \text{ enligt antagande}$$
$$= 2 \cdot 2^{p+1} - 1$$
$$= 2^{(p+1)+1} - 1 \text{ så } P_{p+1} \text{ gäller}$$

Slutsats: P_n gäller för alla $n \in \mathbb{N}$.

VG.1 Låt n vara ett 4-siffrigt tal abcd

dvs $n = a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d$

Då är motsvarande $m = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c - 2d$

Vi vill visa att $7 \mid n \iff 7 \mid m$

Observera att $n - 3m = a \cdot 1000 - a \cdot 300 + b \cdot 100 - b \cdot 30 + c \cdot 10 - c \cdot + d + 6d$

$= a \cdot 700 + b \cdot 70 + c \cdot 7 + d \cdot 7$

så $7 \mid n - 3m$ så $n \equiv 3m \mod 7$

och $7 \mid n \iff 7 \mid 3m$

$\iff 7 \mid m$ eftersom $sgd(7,3) = 1$.

OBServera att samma metod gäller för n med fler eller färre siffror.

VG 2

Ett sätt att hitta gemensamma delare för polynomerna

$P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ och $R_a(x) = x^3 - ax - 2$

är att börja med att faktorisera $P(x)$: Vi ser att $P(1) = 0 = P(-1)$

$P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$

Så $SGD(P, R_a)$ kan vara 1, $(x-1)$, $(x+1)$, $(x-2)$

eller en produkt av dessa.

För $x = 1$ är $R_a(x) = 0 \iff R_a(1) = 1 - a - 2 = 0$

dvs omm $a = -1$ så $(x-1) \mid R_{-1}(x)$.

För $x = -1$ är $R_a(x) = 0 \iff R_a(-1) = -1 + a - 2 = 0$

$\iff a = 3$ så $(x+1) \mid R_3(x)$

För $x = 2$ är $R_a(x) = 0 \iff R_a(2) = 8 - 2a - 2 = 0$

$\iff 6 = 2a \iff a = 3$ så $(x-2) \mid R_3(x)$

Slutsats $SGD(P, R_{-1}) = (x-1)$, $SGD(P, R_3) = (x+1)(x-2)$

och $SGD(P, R_a) = 1$ för $a \notin \{-1, 3\}$.