MATEMATIK, Göteborgs universitet

Omtentamen Aritmetik och algebra 7,5hp LGMA10, L9MA10, VT17, Laura Fainsilber

2017-08-18, kl.8.30-12.30

Hjälpmedel: inga hjälpmedel. Telefonvakt: Tim Cardilin, tel.x5325

Förklara hur du resonerar och räknar. Poäng ges inte för bara svaren, utan för kvalité och förklaring av lösningarna.

Du som är godkänd på minst 6 av 7 veckouppgifter vårterminen 16 behöver inte svara på den preliminära delen och behöver 15p från G-delen för att bli godkänd. Du som är godkänd på 4 eller 5 veckouppgifter vårterminen 16 behöver minst 15p från G-delen och totalt 18p från preliminärdelen och G-delen. Du som är godkänd på färre än 4 veckouppgifter vårterminen 16 behöver minst 15p från G-delen och totalt 20p från preliminärdelen och G-delen.

För betyget VG krävs godkänd och 22p från G-delen och VG-delen.

- **Preliminär del:** (8p)

P-1 Faktorisera polynomet: $x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = (x-4)^3$. (2p)

P-2 Ange definitionsmängden och den inversa funktionen för funktionen (2p)

$$f(x) = \sqrt{e^x}$$

$D = \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = 2\ln y$

P-3 Skriv talet 2017 i det binära talsystemet: $2017 = 11111100001 = 1024+512+256+128+64+32+1$. (2p)

P-4 Låt A, B, C vara tre mängder. Illustrera mängden $A \cup B \backslash (B \cap C)$ med en Eulerdiagram. Rita tre ballongersom skär varandra och namnge dem A, B, C. Färglägg de delar som ligger i A och de delar som ingår i B, utom de delar som ingår i snittet av B och C (inte heller de som ligger i snittet för alla tre mängder). (2p)

- **Frågor för betyget G (och VG):** (20p)

G-1 Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar skall skrivas. Bladet lämnas in tillsammans med övriga lösningar. (5p)

G-2 Rita enhetscirkeln i det komplexa talplanet. (2p)

Placera minst 5 olika punkter i den första kvadranten (inkl. axlarna) och uttryck punkterna både i formen $a + ib$ och i polär form.

Placera och skriv ner även punkternas konjugater.

Se t.ex.

https://en.wikibooks.org/wiki/Trigonometry/Trigonometric_Unit_Circle_and_Graph_Reference

G-3 a. Skriv ner summan av de första n udda talen med hjälp av summatecknet $\sum$. (1p)
$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$ eller $\sum_{i=0}^{n-1}(2i+1)$. Observera att $\sum_{i=0}^{n}(2i+1)$ har $n+1$ termer, dvs är summan av de $n+1$ första udda talen (och är lika med $(n+1)^2$).

b. Beräkna några exempel för små värden av n och bevisa med induktion att summan av de första n udda talen är lika med talet n^2 (4p)
Exempel: $1+3=4$, $1+3+5=9$, $1+3+5+7=16$. Att räkna dessa exempel ger ett sätt att dubbelkolla att man har skrivit formeln rätt. Tar man bara ett exempel är det risk att man missar det.
För beviset att $\sum_{i=1}^{n} 2i-1=n^2$, se häftet Explorativa Övningar, Kap 9, s.73

G-4 Avgör om talet 437 är primtal, eller faktorisera det om det är sammansatt. Glöm inte att visa ditt arbete.

Vi prövar delbarhet med de minsta primtalen, i tur och ordning. Delbarhetskriterier visar att 437 inte är delbart med 2, 3, 5. Man kan prova att dela med 7 eller konstatera att $432=420+14$ är delbart med 7 och därmed inte 437. På liknande sätt dela med 11 eller se att 440 är delbart med 11. Dela med 13 eller se att $437=390+47$ där första termen är debart med 13 men inte det andra. Dela med 17 eller se att $437=340+97$ där första termen är debart med 17 men inte det andra.

När man testar delbarhet med 19 inser man att $437=19\cdot 23$ (2p)

G-5 Låt $f(x)=|x-5|$ och $g(x)=|x^2-8x+15|$

a. Lös ekvationen $f(x)=g(x)$ (1p)
Vi har två fall beroende på om innehållet i absolutbeloppen är av samma eller motsatta tecken: $x-5=x^2-8x+15$ och $-x+5=x^2-8x+15$.
Första fallet, om $x-5$ och $x^2-8x+15$ är båda positiva eller båda negativa, ger $x^2-9x+20=0$ dvs $(x-5)(x-4)=0$ (kan gissas eftersom summan av nollställen är 9 och produkten 20, eller fås med pq-formeln).
Andra fallet, om $x-5$ och $x^2-8x+15$ har olika teckan, ger $x^2-7x+10=0$ dvs $(x-2)(x-5)=0$.
Så ekvationen har lösningar $x=2,4$ och 5.

b. Skissa grafer för funktionerna f och g. (2p)
Man skissar med fördel båda grafer på samma bild, så skall graferna skära varandra för $x=2,4$ och 5. Kolla med Geogebra för en fin bild.

c. Lös olikheten $f(x)\geq g(x)$. (3p)
Man ser på graferna att grafen för $f(x)=|x-5|$ ligger ovanför grafen för $g(x)=|x^2-8x+15|$ för $2\leq x\leq 4$.

V.G. Vänd för VG-frågor!

- **Frågor för betyget VG:** (10p)

VG-1 Bevisa på tre olika sätt att $a^2 - 1$ är delbart med 8 för alla udda tal a. (5p)

Detta kan göras med restaritmetik: kolla alla värden $a = 1, 3, 5, 7$ modulo 8

Med faktorisering: $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$ är produkten av två successiva jämna tal. Ett av de är då även delbart med 4, så produkten är debart med 8.

Med induktion.

VG-2 Bestäm alla heltalsvärden på parametern t som är sådana att ekvationen $x^3 + tx + 3 = 0$ har (minst) ett heltalsrot. (5p)

Ett heltalsrot r ger upphov till en faktorisering $(x-r)(x^2+px+q)$. När man multiplicerar ut skall den kvadratiska termen försvinna, vilket ger $r = p$. Vi identifierar de andra koefficienterna: $-rq = 3$ och $q - rp = t$.

Heltalet r kan då bara vara $1, -1, 3$ eller -3, vilket ger $t = q - r^2 = 2, -4, -8$ eller -10.

Anonym kod	**Tentamen LGMA10/L9MA10**	sid.nummer **1**	Poäng

G-1 Till nedanstående uppgifter skall svar anges på anvisad plats

a) Anta att utsagan A är sann. Ange sanningsvärdet för följande utsagor ("S" för Sant, "F" för Falskt, "?" om det beror på värdet av B) (3p)

- $A \implies B$: ?
- $B \implies A$: S
- $A \vee B$: S
- $A \wedge B$: ?
- $\neg A \implies B$: S
- $A \iff (B \vee \neg B)$: S

. . . .

b) Vad säger faktorsatsen?
Se kursboken (2p)