LG MA10 / L9 MA10

Uppgifter om Komplexa tal i kursstencilen.

A – se Vretblad

Övning B 2: $\overline{z} = 3-5i$

3 a) $\overline{\overline{z}} = \overline{(\overline{z})} = \overline{(\overline{a+ib})} = \overline{a-ib} = a-(-ib) = a+ib = z$

b) skriv $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a_1+a_2) + i(b_1+b_2)} = a_1 + a_2 - i(b_1+b_2)$

$= (a_1 - ib_1) + a_2 - ib_2 = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

c) $\overline{z_1 z_2} = \overline{(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)} = \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)}$

$= a_1a_2 - b_1b_2 - i(a_1b_2 + a_2b_1)$

$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2)$

$= a_1a_2 + i^2 b_1b_2 - ib_1a_2 - ia_1b_2$

$= (a_1a_2 - b_1b_2) - i(b_1a_2 + a_1b_2)$

så VL = HL.

d) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}\right)} = \overline{\left(\frac{z_1\overline{z_2}}{a_2^2+b_2^2}\right)} = \frac{\overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}}}{a_2^2+b_2^2} = \frac{\overline{z_1} \cdot z_2}{a_2^2+b_2^2}$

$= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

kan också beräknas utifrån "koordinater" a_i, b_i.

Övning C. 1: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$: "längden av sträckan från 0 till z i det komplexa planet.

2 a) se definitionen: $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ så $|z|^2 = z\bar{z}$

b) $|\bar{z}| = \sqrt{\bar{z}\bar{\bar{z}}} = \sqrt{\bar{z}z} = |z|$

c) $|z_1z_2|^2 = z_1z_2 \cdot \overline{z_1z_2} = z_1z_2\bar{z}_1\bar{z}_2$ enligt B3c

$= z_1\bar{z}_1 \cdot z_2\bar{z}_2$ kommutativitet för ·

$= |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$ (OBS! reella tal)

så $\sqrt{|z_1z_2|^2} = \sqrt{|z_1|^2|z_2|^2}$

dvs $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$.

d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1\bar{z}_2}{\underbrace{|z_2|^2}_{\text{reellt tal}}}\right| = |z_1| \cdot \left|\frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}\right| = |z_1| \cdot \sqrt{\frac{\bar{z}_2 z_2}{|z_2|^2 \, |\bar{z}_2|^2}}$

$= |z_1| \cdot \sqrt{\frac{1}{|z_2|^2}} = |z_1| \cdot \frac{1}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

3 låt $z_1 = 23 + 35i$

$z_2 = 10 + 100i$

Då är $(23^2+35^2)(10^2+100^2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$

$= |z_1z_2|^2 = a^2+b^2$

där $z_1z_2 = a+ib$

Eftersom $z_1z_2 = (23+35i)(10+100i)$

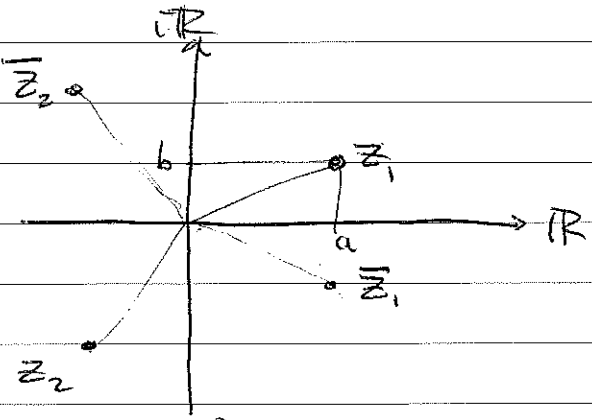
$= 230 - 3500 + 350i + 2300i$

$= -3270 + i(2650)$

så vi kan ta $k = 3270$ och $l = 2650$

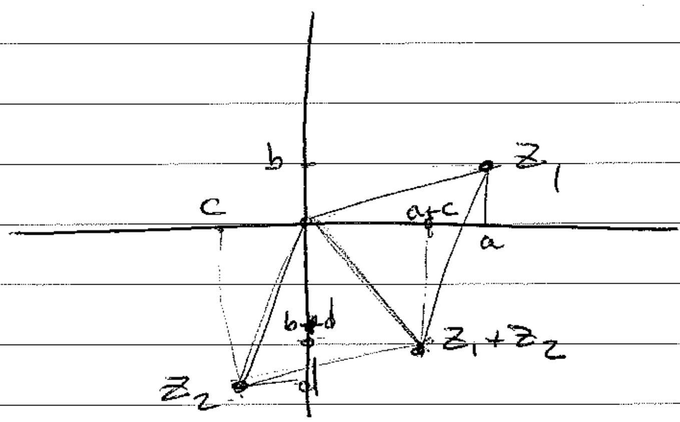
(OBS: $-3270 + i \cdot 2650$ har samma absolutbelopp som $3270 + i\,2650$:).

Övning D 1a) $\bar{z}$ är spegelbilden av z m.a.p. x-axeln



b) $\mathrm{Re}\, z = a$: x-koordinat
$\mathrm{Im}\, z = b$: y-koordinat
$|z|$ är längden av sträckan $0 - z$ (Pythagoras sats)

c)



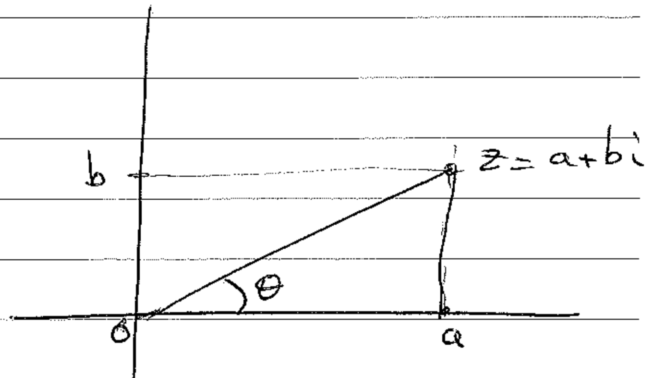
$|z_1|$, $|z_2|$ är längderna på parallellogramets sidor. $|z_1+z_2|$ längden på diagonalen $0 - z_1+z_2$.

(2) Triangelolikheten: raka sträckan från 0 till z_1+z_2 är kortare än "omvägen" via z_1.

(3) $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (-z_2) + z_1$ kan tolkas som sträckan från punkten z_2 till z_1 (från z_2 till 0, därifrån till z_1)
$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$ är avståndsformeln för avståndet mellan z_1 och z_2.

Övning E

(1)



Om man tittar på triangeln i figuren, så ger trigonometrin $\cos\theta = \dfrac{a}{|z|}$ $\left(= \dfrac{\text{närliggande sidan}}{\text{hypotenusan}}\right)$

och $\sin\theta = \dfrac{b}{|z|}$ $\left(= \dfrac{\text{motstående sidan}}{\text{hypotenusan}}\right)$

dvs $b = |z| \sin\theta$

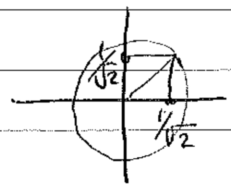
$a = |z| \cos\theta$.

och $z = |z| (\cos\theta + i \sin\theta)$.

(2) (a) $z = 1 + i$: $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

så $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ och $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

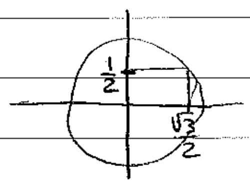
man känner igen $\theta = \dfrac{\pi}{4}$



så $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

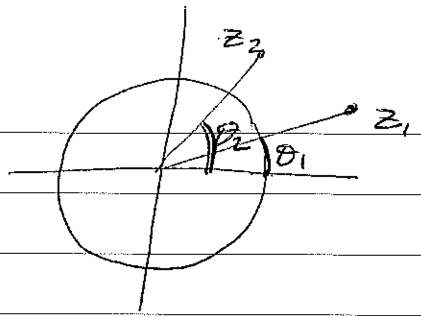
(b) $z = \sqrt{3} + i$ $|z| = \sqrt{3+1} = 2$

så $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$



man känner igen $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

$z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.



(3) $z_1 = |z_1| (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$
$z_2 = |z_2| (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2| \big(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 + i (\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \cos\theta_2 \sin\theta_1)\big)$$

$$= |z_1||z_2| \big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i \sin(\theta_1+\theta_2)\big)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{|z_1||z_2|}{|z_2|^2} \big(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 + i (\cos\theta_2 \sin\theta_1 - \cos\theta_1 \sin\theta_2)\big)$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

- Vid multiplikation multipliceras absolutbeloppen, medans vinklarna adderas.

- vid division: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
  och $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ är $\theta_1 - \theta_2$.

(5) Multiplikation med i "vrider" z $90°$ (en $\frac{1}{4}$-varv).
$(|i| = 1,\ \arg 1 = 90° \ (= \frac{\pi}{2}))$

(6) OBS! De Moivres formel följer från (3) ovan:
$z^n = z \cdot z \cdots z$ har absolutbelopp $|z|^n$
och argumen $n \cdot \arg(z)$

Övning F

(1) $\sqrt{-1}$ är ett "tal" vars kvadrat är -1
Det finns två sådana komplexa tal: i och $-i$
med $\sqrt{-1}$ menas i, med $-\sqrt{-1}$ menas $-i$.

(2) $\sqrt{3+4i}$ är ett komplext tal $z = a+bi$ med $z^2 = 3+4i$
så, eftersom $z^2 = a^2 - b^2 + i2ab$,
måste $\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$ så $\begin{cases} (a+b)(a-b) = 3 \\ ab = 2 \end{cases}$
och man kan gissa värdena $a = 2$, $b = 1$,
eller $a = -2$ $b = -1$
som ger $z_1 = 2 + i$
$z_2 = -2 - i$

~~Istället~~ för detta kan man omvandla till polär form
$|z^2| = 5$, $\arg z^2 = \arccos \frac{3}{5}$
$\frac{3}{5}$ tillhör inte cos för någon av de standardvinklar som använd här, men en tabell eller miniräknare/dator ger motsvarande vinkel 53°