MATEMATIK, Göteborgs universitet

Tentamen Aritmetik och algebra 7,5hp
LGMA10, L9MA10, VT18

2017-03-14, kl.8.30-12.30

Hjälpmedel: inga hjälpmedel. Telefonvakt: Laura Fainsilber 031-772 3560

Förklara hur du resonerar och räknar. Poäng ges inte för bara svaren, utan för kvalité och förklaring av lösningarna.

Du som är godkänd på minst 6 av 7 veckouppgifter vårterminen 18 behöver inte svara på den preliminära delen och behöver 15p från G-delen för att bli godkänd. Du som är godkänd på 4 eller 5 veckouppgifter vårterminen 18 behöver minst 15p från G-delen och totalt 18p från preliminärdelen och G-delen. Du som är godkänd på färre än 4 veckouppgifter vårterminen 18 behöver minst 15p från G-delen och totalt 20p från preliminärdelen och G-delen.

För betyget VG krävs godkänd och 22p från G-delen och VG-delen.

- **Preliminär del:** (8p)

P-1 Lös olikheten $\frac{x+3}{x-5} \geq 0$. (2p)

P-2 Skriv summan $7 + 10 + 13 + 16 + \cdots \cancel{99}$ 100 med hjälp av summatecknet $\sum$. (2p)

P-3 Ange primtalsfactoriseringen för 314. (2p)

P-4 Ange två polynom av grad 4 utan reella nollställen vars största gemensamma delare är $X^2 + 10$. (2p)

- **Frågor för betyget G (och VG):** (20p)

G-1 Översätt talet 2018 till det antika babylonska talsystemet (ett positionssystem med bas 60, med två symboler: I för 1 och < för 10).
Ge några exempel med korta förklaringar som visar hur man skrev tal i det babylonska talsystemet. (3p)

G-2 Betrakta funktionen $f_{a,b}(x) = |(x-a)^2 + b|$. (4p)
Till exempel är funktionen $f_{1,2}(x) = |(x-1)^2 + 2|$.
Välj några olika värde för de reella parametrarna a och b som illustrerar hur grafen kan se ut i olika fall. Skissa de tillhörande graferna.

G-3 Låt w vara det komplexa talet med $|w| = 2$ och $\arg(w) = \pi/3$
Låt z vara det komplexa talet med $|z| = 3$ och $\arg(z) = 3\pi/4$

a. Rita det komplexa talplanet och placera w och z och deras konjugat. (3p)
Placera talen $-w, -z, w^2, z^2, w^{-1}, z^{-1}, w \cdot z$ och ange deras polära koordinater.

b. Ange en binomisk ekvation som w är en lösning till (av formen $X^n = k$ med n naturligt tal och k ett reellt tal). (2p)

G-4 Bevisa att det finns oändligt många primtal. (4p)

G-5 David och Daniel åker skidor. De åker sina två favoritliftar hela dagen: Gondolen (1610m lång) och Bergbanan (840m lång). De tror att de har åkt exakt 7km lift under dagen. Kan det stämma? Hur många gånger kan de ha åkt varje lift i så fall? Förklara ditt resultat. (4p)

V.G. Vänd för VG-frågor!

Preliminärdel, Aritmetik och Algebra LG/gMA10

P-1 $\dfrac{x+3}{x-5}$ är positiv om både $(x+3)$ och $(x-5)$ är positiva eller båda negativa.

x		-3		5	
$(x+3)$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-5)$	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x+3}{x-5}$	$+$	0	$-$		$+$

så olikheten gäller för $x \in \,]-\infty, -3] \cup \,]5, +\infty[$

P-2 $7+10+13+\dots+100 = \sum_{k=2}^{33} 3k+1 = \sum_{k=1}^{32} 3k+4$ (2p)

$7+10+13+\dots+97+99 = \sum_{k=2}^{33} 3k+1 \quad -1$

P-3 $314 = 2 \cdot 157$,

$2, 3, 5, 7, 11, 13$ delar ej 157 så 157 är primtal.

P-4 t.ex $P(x) = (x^2+10)(x^2+1)$

$Q(x) = (x^2+10)(x^2+3)$

Godkänd del, Aritmetik och Algebra, tenta 2018.03.14.

G1.

(1,5p)

$2018 = 3 \cdot 600 + 218$
$= 3 \cdot 600 + 3 \cdot 60 + 38$
$= 3 \cdot 600 + 3 \cdot 60 + 3 \cdot 10 + 8 \cdot 1$

<<< TTT <<< TTTTT TTT

Systemet har bas 60, T = 1 men även 60, 3600 ⋯ 60^n

< = 10, 600, 36'000 : $10 \cdot 60^n$

(1,5p)

2 = TT
33 = <<< TTT
61 = T T
120 = TT
671 = 600 + 60 + 10 + 1 : < T < T

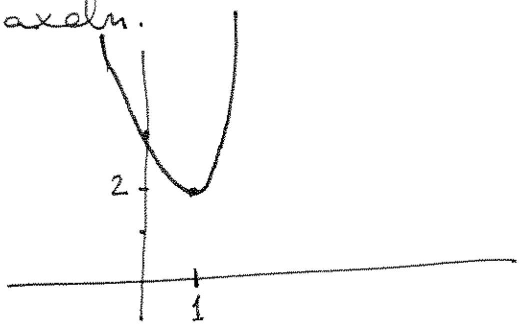
} OBS! ingen markering för 0 eller för positionen, så det är svårt att skilja 2, 61, 120 ⋯

G2

Grafen kan se ut på två olika sätt:

- en konvex parabel, om $b \geq 0$. Då är $f_{a,b}(x) = (x-a)^2 + b$ redan ovanför x-axeln.

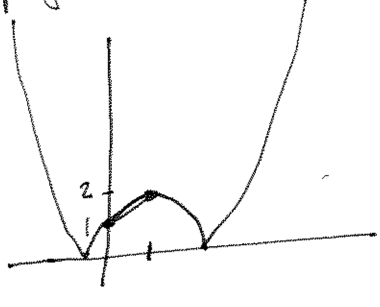
ex $f_{1,2}(x)$:



(2p)

- om $b < 0$, så är den delen av parabeln $(x-a)^2 + b$ som ligger under x-axeln speglad

ex $f_{1,-2}(x) = |(x-1)^2 - 2|$

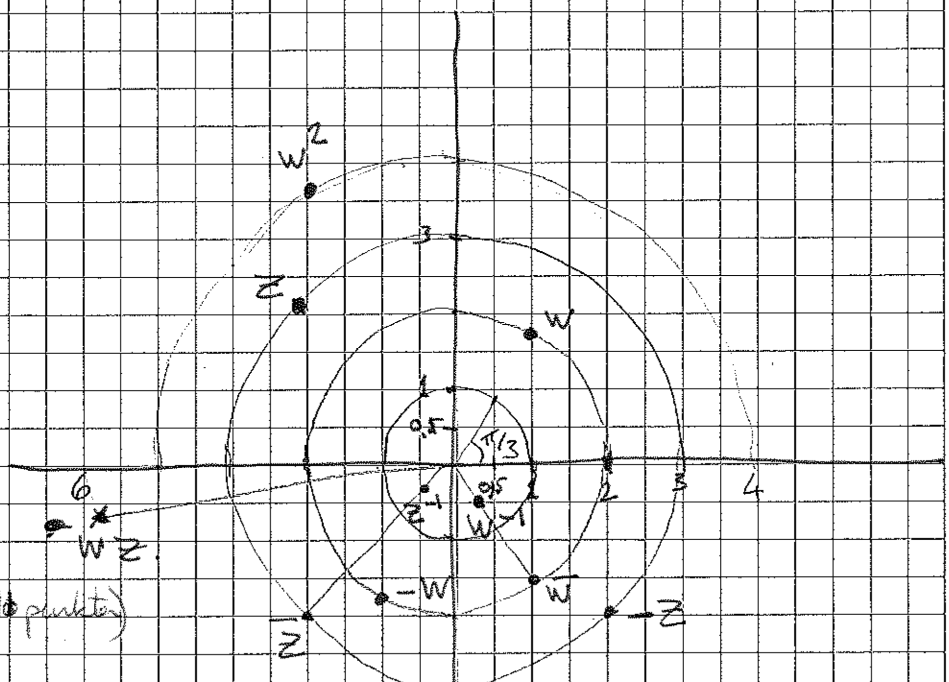


(2p)

Olika värden för a förskuter grafen till höger ($a > 0$) och vänster ($a < 0$)

G-3 ⓐ $w = 2e^{i\pi/3}$

$z = 3e^{3i\pi/4}$



(3p)

2 p för ritningen (10 punkter)

1 p för polär form

$-w$: absbelopp 2, argument $-2\pi/3 = 4\pi/3$ (tänk $\frac{1}{2}$ varv från w)

$-z$: ——— 3 ——— $-\pi/4 = 7\pi/4$ (——— ——— $-z$)

$w^2 = 4e^{2i\pi/3}$ absbelopp 4, argument $2\pi/3$

$z^2 = 9e^{6i\pi/4} = 9e^{3i\pi/2}$ absbelopp 9, argument $3\frac{\pi}{2}$

dvs $z^2 = 9\left(\cos 3\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

z^2

$w^{-1} = \frac{1}{2}e^{-i\pi/3}$: abs belopp $\frac{1}{2}$, argument $-\frac{\pi}{3}$

$z^{-1} = \frac{1}{3}e^{-i\pi 3/4}$: absbelopp $\frac{1}{3}$ argument $-\frac{3\pi}{4}$

$wz = 6 \cdot e^{i\pi\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)} = 6e^{i\pi\frac{13}{12}}$

absbelopp 6, argument $\frac{13}{12}\pi$ (lite mer än π)

ⓑ $w^3 = 2^3 \cdot e^{3i\pi/3} = 8e^{i\pi} = -8$

(2p) Så $w^3 = -8$ eller $w^6 = 64$ är ekvationer med w som lösning.

G-4. Se Vretblad § 2.5 eller föreläsningsanteckningar.

OBS att $\prod_{i=1}^{n} p_i + 1$, där $p_1, \dots p_n$ är "alla kända primtal" kan vara ett primtal eller en produkt av nya, "okända" primtal.

(4p)

(3p för en slutsats som utgår ifrån att $\prod p_i + 1$ är primtal.)

G-5: Man vill lösa den diofantiska ekvationen

$1610x + 840y = 7000$ med positiva x och y som antal åk på Gondolen, respektive Bergbanan.

Reducera ekvationen till $161x + 84y = 700$, eller längre, till $23x + 12y = 100$

Då kan man räkna med Euklides algoritm eller gissa lösningen $23(-100) + 12(200) = 100$

(2p) med $(x_0, y_0) = (-100, 200)$

De andra lösningarna är av formen

(1p) $(x_n, y_n) = (-100 + 12n, 200 - 23n)$

Genom att kolla $n = 8, 9, 10$, ser man att ingen lösning har x och y båda positiva.

(1p)

Så de kan inte ha åkt ~~exakt~~ 7000 m.