Preliminärdel

P-1

$$\begin{array}{l} \quad x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \\ \hline x^5 \qquad\quad - 1 \;\big|\; x+1 \\ -(x^5 + x^4) \\ \hline \quad -x^4 \\ \quad -(-x^4 - x^3) \\ \hline \qquad x^3 \\ \qquad -(x^3 + x^2) \\ \hline \qquad\quad -x^2 \\ \qquad\quad -(-x^2 - x) \\ \hline \qquad\qquad x - 1 \\ \qquad\qquad -(x+1) \\ \hline \qquad\qquad\quad -2 \end{array}$$

kvot: $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

rest: 2

P-2

$$x^2 + 13x + 30 = x^2 + 2 \cdot (6,5)x + (6,5)^2 - (6,5)^2 + 30$$

$$= (x^{\cancel{2}} + 6,5)^2 - 42,25 + 30$$

$$= (x + 6,5)^2 - 12,25$$

minimipunkten ligger vid $(x, y) = (-6,5\,,\ -12,25)$

P-3

$$f \circ g\,(x) = f\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2 + 1 = \frac{1}{x^4 + 2x^2 + 1} + 1$$

$$g \circ f\,(x) = g\left(x^2+1\right) = \frac{1}{(x^2+1)^2 + 1}$$

P-4:

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{3})^2}{(\sqrt{6} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{3})} = \frac{6 + 3 - 2\sqrt{18}}{6 - 3}$$

$$= \frac{9 - 6\sqrt{2}}{3} = 3 - 2\sqrt{2}.$$

GÖTEBORGS UNIVERSITET

Aritmetik och Algebra.

G-frågor.

G-1: Man kan t.ex kolla alla produkter av tre successiva tal modulo 6. Då tittar vi på $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$

$0 \cdot 1 \cdot 2 \equiv 0$

$1 \cdot 2 \cdot 3 \equiv 6 \equiv 0$

$2 \cdot 3 \cdot 4 \equiv 24 \equiv 0$

$3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 \equiv 0$

$4 \cdot 5 \cdot 0 = 5 \cdot 0 \cdot 1 = 0$

Så produkten av tre successiva tal är kongruent med 0 modulo 6, dvs delbart med 6 V.S.B.

Man kan också argumentera att vartannat tal är jämt och vart tredje tal delbart med 3 för att komma fram till att det bland tre successiva tal finns ett delbart med 2 och ett med 3, så produkten är delbart med 6.

G-2 Vi betraktar en aritmetisk följd $a_k = a + kd$, där a och d är fix och k varierar i $\mathbb{N}$.
T. ex $a_k = 10 + k \cdot 3$ för följden med $a = 10$ och $d = 3$.
då $a_0 = 10$, $a_1 = 13$, $a_2 = 16$, $a_3 = 19$ osv.
Vårt påstående P_n är att för ett naturligt tal n, så ges summan av de första n element i följden $\sum_{k=0}^{n-1} a_k$ av formeln $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$.

Vi bevisar detta med induktion.
Basfall för $n = 1$ är vänsterledet $\sum_{k=0}^{0} a_k = a_0 = a + 0d$
och högerledet $\frac{1}{2}(2a + 0d) = a$, så P_0 stämmer

Vi kollar även P_2 för att se hur summan växer:
för $n = 2$ är vänsterledet
$\sum_{k=0}^{1} a_k = a_0 + a_1 = a + (a + d) = 2a + d$

och högerledet $\frac{2}{2}(2a + d) = 2a + d$, så P_2 stämmer.

Induktionsantagandet
Vi antar att det finns ett tal t sådant att P_t stämmer, dvs $\sum_{k=0}^{t-1} a_k = \frac{t}{2}(2a + (t-1)d)$.

Induktionssteg Vi vill visa att även P_{t+1} gäller i så fall.
Vänsterledet är
$$\sum_{k=0}^{t} a_k = \left(\sum_{k=0}^{t-1} a_k\right) + a_t = \frac{t}{2}(2a + (t-1)d) + (a + td)$$
$$= ta + \frac{t(t-1)}{2}d + a + td$$

dvs $$VL_{t+1} = ta + a + \frac{1}{2}\left(t(t-1) + 2t\right) d$$

$$= (t+1)a + \frac{1}{2}\left(t^2 - t + 2t\right) d$$

$$= (t+1)a + \frac{1}{2}\left(t^2 + t\right) d$$

$$= (t+1)a + \frac{1}{2}\left(t(t+1)\right) d$$

$$= \frac{t+1}{2}\left(2a + td\right)$$

vilket är högerleden i påståendet P_{t+1}.

Slutsats: Eftersom P_1 gäller och $\forall t,\ P_t \Rightarrow P_{t+1}$, så gäller P_n för varje $n \geq 1$, dvs

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a + kd) = \frac{n}{2}\left(2a + (n-1)d\right).$$

G-2, variant med $a = 10$, $d = 3$

Vi vill visa med induktion att för varje $n \geq 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} 10 + 3k = \frac{n}{2}\left(20 + 3(n-1)\right)$$

Basfall för $n = 1$

$$VL_1 : \sum_{k=0}^{0} 10 + 3k = 10 + 0 \cdot 3 = 10$$

$$HL_1 = \frac{1}{2}\left(20 + 3 \cdot 0\right) = \frac{20}{2} = 10 \quad \text{, så } VL_1 = HL_1$$

vi testar även $n = 2$ för att se lite mer av summan

$$VL_2 : \sum_{k=0}^{1} 10 + 3k = 10 + (10 + 3) = 23$$

$$HL_2 : \frac{2}{2}\left(20 + 3 \cdot 1\right) = 23 \quad \text{, så } VL_2 = HL_2$$

Induktionsantagande Anta att Påståendet gäller för någon t, dvs att för detta t:

$$\sum_{k=0}^{t-1} 10 + 3k = \frac{t}{2}\left(20 + 3(t-1)\right)$$

Induktionssteg Vi vill visa att påståendet i så fall gäller även $t+1$, dvs att

$$\sum_{k=0}^{t} 10 + 3k = \frac{t+1}{2}\left(20 + 3t\right)$$

$$VL_{t+1} = \left(\sum_{k=0}^{t-1} 10 + 3k\right) + 10 + 3t = \frac{t}{2}\left(20 + 3(t-1)\right) + 10 + 3t$$

$$= 10t + \frac{3}{2} t(t-1) + 10 + \frac{3}{2} \cdot 2t$$

$$= 10t + 10 + \frac{3}{2}(t^2 - t + 2t)$$

$$HL_{t+1} : \frac{t+1}{2}(20 + 3t) = \frac{20t + 20}{2} + \frac{3}{2} t(t+1)$$

$$= 10t + 10 + \frac{3}{2}(t^2 + t)$$

Slutsats: Påståendet gäller $= VL_{t+1}$ för alla $n \geq 1$.

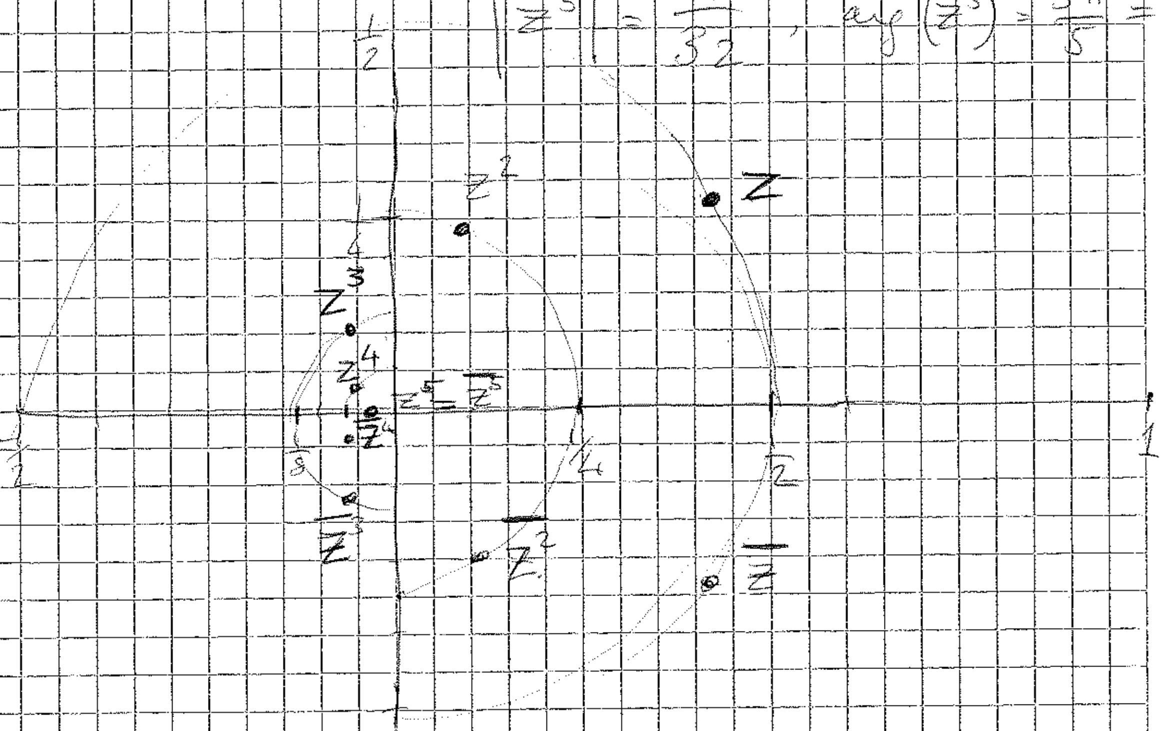
G 3 $\quad z \in \mathbb{C}, \quad |z| = \frac{1}{2} \quad \arg(z) = \frac{\pi}{5}$

Då har vi $\quad |z^2| = \frac{1}{4} \quad \arg(z^2) = \frac{2\pi}{5}$

$|z^3| = \frac{1}{8} \quad \arg(z^3) = \frac{3\pi}{5}$

$|z^4| = \frac{1}{16} \quad \arg(z^4) = \frac{4\pi}{5}$

$|z^5| = \frac{1}{32}, \quad \arg(z^5) = \frac{5\pi}{5} = \pi$

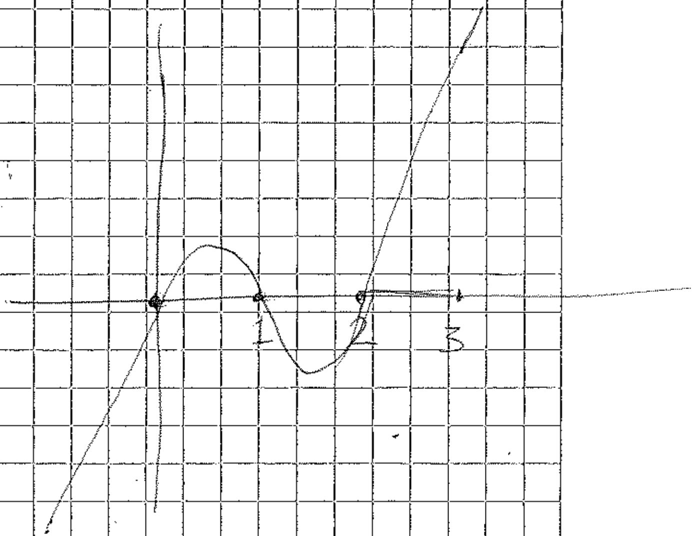


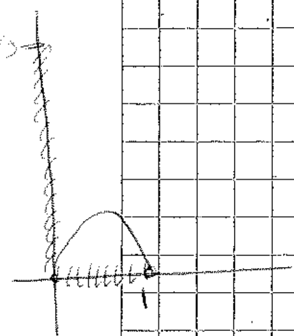
eftersom $\arg z^5 = \pi$ och $|z^5| = |z|^5 = \frac{1}{32}$ har vi

$$\boxed{z^5 = -\frac{1}{32}}$$

G-4 $f(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$

skiss:



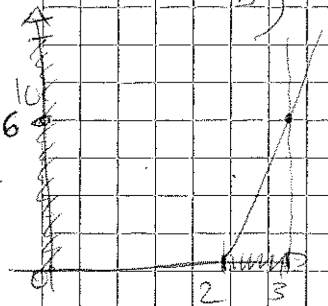


a) ~~ett~~ intervall där f är varken injektiv eller surjektiv

$f : [0, 1] \longrightarrow [0, 10]$

de små y-värden fås för två x-värden

de stora y-värden i $[0, 10]$ nås inte

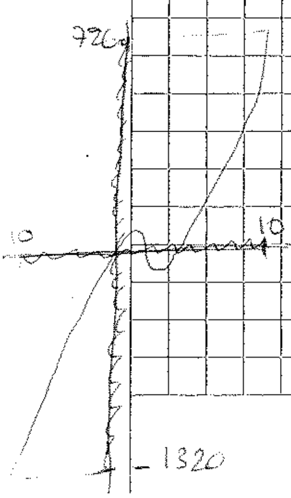


b) f injektiv men ej surjektiv för

$f : [2, 3] \longrightarrow [0, 10]$

f är injektiv eftersom den är strängt växande,

men når inte y-värdena större än $f(3) = 6$



c) f surjektiv, ej injektiv för $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

eller $f : [-10, 10] \longrightarrow [-1320, 720]$

där $f(-10) = (-10)(-11)(-12) = -1320$

$f(10) = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

G-5 | Om man tänker på delbarhetskriterier för delbarhet med 2, 5, 10 för tal skrivna i 10-bas, så kan samma argument användas för tal skrivna i 6-bas:

Tal delbara med 6 har 0 som ental, eftersom division med 6 ger rest 0.

Tal delbara med 2 har 0, 2, eller 4 som ental eftersom division med 6 kan ge rest 0, 2, eller 4.

Tal delbara med 3 har 0 eller 3 som ental.

Så $33450_6 = n_1$ är delbart med 6, ~~ej~~ med 2 och med 3

$42531_6 = n_2$ är delbart med varken 2, 3 eller 6

$14442_6 = n_3$ är delbart med 2, ej med 3 eller 6

$5523_6 = n_4$ är delbart med 3, ej med 2 eller 6

Delbarhet med 5 kan avgöras med siffersuman, på samma sätt som delbarhet med 9 för tal skrivna i 10-bas eftersom $6 \equiv 1$ modulo 5, då även $6^2 \equiv 6^3 \equiv \dots \equiv 1 \mod 5$

Så siffersumman av ett tal skriven i 6-bas ger resten vid division med 5:

n_1 har siffersumma $15 \equiv 0 \mod 5$

n_2 ———— $15 \equiv 0 \mod 5$

n_3 ———— $15 \equiv 0 \mod 5$

n_4 ———— $10 \equiv 0 \mod 5$

så alla är delbara med 5.