

MATEMATIK, Göteborgs universitet
Tentamen Aritmetik och algebra 7,5hp
LGMA10, L9MA10, VT18
2018-06-04, kl.8.30-12.30

Hjälpmedel: inga hjälpmedel.

Telefonvakt: Jakob Hultgren tel 031 772 5325

Förklara hur du resonerar och räknar. Poäng ges inte för bara svaren, utan för kvalitet och förklaring av lösningarna.

Du som är godkänd på minst 6 av 7 veckouppgifter vårterminen 18 behöver inte svara på den preliminära delen och behöver 15p från G-delen för att bli godkänd. Du som är godkänd på 4 eller 5 veckouppgifter vårterminen 18 behöver minst 15p från G-delen och totalt 18p från preliminär delen och G-delen. Du som är godkänd på färre än 4 veckouppgifter vårterminen 18 behöver minst 15p från G-delen och totalt 20p från preliminär delen och G-delen.

För betyget VG krävs godkänd och 22p från G-delen och VG-delen.

• **Preliminär del: (8p)**

P-1 Dividera polynomet $x^5 - 1$ med $x + 1$. Uttryck svaret med kvot och rest. (2p)

P-2 Hitta minimipunkten för $x^2 + 13x + 30$ med hjälp av kvadratkomplettering. (2p)

P-3 Bilda funktionerna $f \circ g$ och $g \circ f$ där $f(x) = x^2 + 1$ och $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ (2p)

P-4 Skriv $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$ med heltalsnämnare. (2p)

• **Frågor för betyget G (och VG): (20p)**

G-1 Bevisa att produkten av tre successiva heltal är delbar med 6. (4p)

(Tips: du kan använda restaritmetik)

G-2 Bevisa med induktion följande formel för summan av en aritmetisk följd (du kan välja specifika värden t.ex. $a = 10$ och $d = 3$ för att se följden mer konkret). (4p)

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a + kd) = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d)$$

G-3 Låt z vara det komplexa talet med $|z| = \frac{1}{2}$ och $\arg(z) = \pi/5$

a. Ange z^2, z^3, z^4, z^5 i polär form. Rita det komplexa talplanet och placera (ungefär) z, z^2, z^3, z^4, z^5 och deras konjugat. (3p)

b. Ange en binomisk ekvation som z är en lösning till (av formen $X^n = k$ med n naturligt tal och k ett reellt tal). (2p)

G-4 Betrakta funktionen $f(x) = x(x-1)(x-2)$. Om vi begränsar funktionen till intervallet $[2, 3]$ har vi en bijektion från $[2, 3]$ till $[0, 6]$. Ange intervall så att begränsningen av funktionen f är (a) varken injektiv eller surjektiv, (b) injektiv men ej surjektiv, (c) surjektiv men ej injektiv. Du kan svara genom att ange intervallen i siffror eller grafiskt. (3p)

G-5 Avgör om vart och ett av följande tal är delbart med 2, 3, 5 eller 6. (4p)

$n_1 = 33450_6, n_2 = 42531_6, n_3 = 14442_6, n_4 = 5523_6$. (Tips: du behöver inte översätta till 10-bas!)

V.G. Vänd för VG-frågor!

• **Frågor för betyget VG: (10p)**

VG-1 Bestäm alla SGD till polynomen

(5p)

$$f(x) = z^4 + 3z^3 + 11z^2 + 2z + 10 \text{ och } g(x) = z^4 + 2z^3 + 6z^2 + 2z + 5$$

VG-2 Ge ett exempel på en diofantisk ekvation med två variabler, med oändligt många lösningar men inga lösningar där båda variabler är positiva. Förklara vad det innebär på ett sätt som en gymnasieelev kan förstå.

(5p)

Lycka till!

Laura