

Lösningsförslag Tentamen Kombinatorik & geometri 2017-03-16

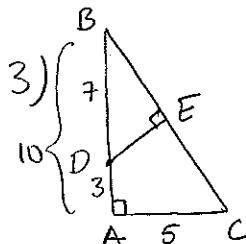
1) Bisektrissatsen - se kurslitteratur

2) STOCKHOLM

Tre bokstavssord: Fall 1, högst ett 0: $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

Fall 2, båda 0 är med: $\binom{3}{2} \cdot 7 = 21$

Totalt: $336 + 21 = 357$



$$|DE| = ?$$

$\triangle ABC \sim \triangle EBD$ enligt VVV-likformighet

Bestäm först $|BC|$ med Pythagoras sats:

$$|BC| = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

Likformighet ger $\frac{|DE|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|BC|} \Rightarrow \frac{|DE|}{5} = \frac{7}{5\sqrt{5}} \Leftrightarrow |DE| = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$

4) Ida, Calle, Stina delar på 11 karameller

a) Överhuvudtaget: "sträcka i räkningen", 11 karameller, 2 sträckor:

$$\binom{13}{11} = \binom{13}{2} = \frac{13 \cdot 12}{2} = 78 \quad \text{Barnen kan dela på}$$

karamellerna på 2 olika sätt.

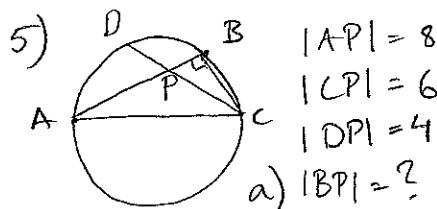
b) Inget av barnen får mer än 5 karameller:

Vi kan räkna ut komplementet: på hur många sätt kan vi dela ut karameller så att någon får minst 6 karameller?

Ge 6 karameller till någon från borgen (3 val) och dela sedan ut övriga 5 karameller till de tre barnen ("sträcke i räkningen")

$$3 \cdot \binom{7}{5} = 3 \binom{7}{2} = 3 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} = 63$$

Antal sätt att dela ut karameller så att ingen får fler än 5 karameller blir då $78 - 63 = 15$.



$$|AP| = 8$$

$$|CP| = 6$$

$$|DP| = 4$$

a) $|BP| = ?$ Enligt kordasatsen: $|AP| \cdot |BP| = |CP| \cdot |DP|$

$$\Rightarrow 8 \cdot |BP| = 6 \cdot 4 \Leftrightarrow |BP| = 3$$

b) $\triangle ABC$ rät. Bestäm cirkelns diameter.

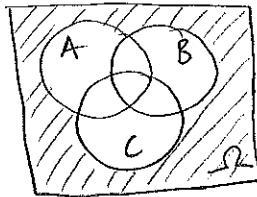
Periferimhlsatsen (Thales sats) ger att om $\triangle ABC$ är rät så är stråken AC en diameter. $\triangle ABC$ och $\triangle PBC$ är rätvinkliga

Pythagoras sats ger: $|BC|^2 = |CP|^2 - |BP|^2 = 6^2 - 3^2 = \sqrt{27}$

$$|AC| = \sqrt{|BC|^2 + |AB|^2} = \sqrt{27 + 11^2} = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$$

6) Hur många av heltaleten $1, 2, 3, \dots, 3300$ är inte delbara med något av talen 2, 3 och 11?

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 3300\} \quad \# \Omega = 3300$$



Vi har delmängderna: A (delbara med 2)
B (delbara med 3)
C (delbara med 11)

Vi söker antalet element i komplementet till $A \cup B \cup C$

$$\frac{3300}{2} = 1650 \Rightarrow \#A = 1650$$

$$\frac{3300}{2 \cdot 3} = 550 \Rightarrow \#(A \cap B) = 550$$

$$\frac{3300}{3} = 1100 \Rightarrow \#B = 1100$$

$$\frac{3300}{2 \cdot 11} = 150 \Rightarrow \#(A \cap C) = 150$$

$$\frac{3300}{11} = 300 \Rightarrow \#C = 300$$

$$\frac{3300}{3 \cdot 11} = 100 \Rightarrow \#(B \cap C) = 100$$

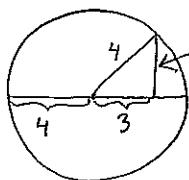
$$\frac{3300}{2 \cdot 3 \cdot 11} = 50 \Rightarrow \#(A \cap B \cap C) = 50$$

$$\text{Inklusion/exklusion} \Rightarrow \#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - (\#A \cap B + \#A \cap C + \#B \cap C) + \#A \cap B \cap C = 1650 + 1100 + 300 - (550 + 150 + 100) + 50 = 2300$$

$$\#(A \cup B \cup C)^* = \#\Omega - \#(A \cup B \cup C) = 3300 - 2300 = \underline{\text{1000 tal ej delbara med 2, 3 eller 11.}}$$

7) Konstruera en sträcka med längd $\sqrt{7}$

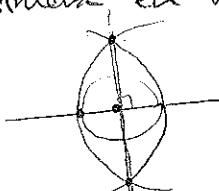
$\sqrt{7} = \sqrt{7 \cdot 1} \Rightarrow$ Vi kan konstruera sträckan $\sqrt{7}$ genom att först konstruera en cirkel med diametern $7+1=8$



① Konstruera en sträcka med längd 8 genom att förlänga den gitna enhetssträckan och använda cirklar med radien 1:

② Dra cirkeln med medelpunkt i punkt p_4 och med radien 4 längdenhet.

③ Konstruera en rät linje genom punkt p_7 : Denna linje skär cirkeln i punkt q . Sträckan mellan punkt p_7 och punkt q har längden $\sqrt{7}$.



8) Fyrsiffriga leder, hur många finns det?

a) 1 och 2 men inga andra:

Fall 1: Tre 1:or, en 2:a: Fyra positioner för 2:a, inga andra möjligheter.

Fall 2: Två 1:or, två 2:or: $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ möjligheter att placera 1:or.

Fall 3: En 1:a, tre 2:or: samma som fall 1 $\Rightarrow 4$.

Totalt: $4 + 6 + 4 = 14$ Svar: 14 portkoder

b) 1, 2 och 3 men inga andra:

Fall 1: Två 1:or: $\binom{4}{2} \cdot 2 = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 2 = 12$

Fall 2: Två 2:or: $\binom{4}{2}$ Hur 2:a och 3:a placeras

Fall 3: Två 3:or: $\binom{4}{2}$ 1:ornas placering samma som fall 1 \Rightarrow Totalt $3 \cdot 12 = 36$

Svar: 36 portkoder

c) 1, 2, 3 och 4. Nu har vi inga dubletter, alltså $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Svar: 24 portkoder