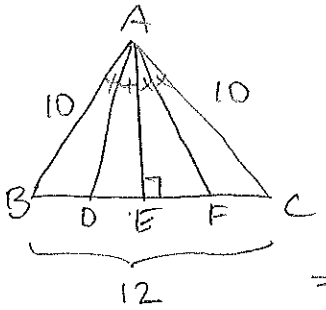
# Tenta Kombinatorik & geometri 15/8 - 17 Lösningar

1. Se kurslitteratur, sid 27 - 29 i Tamburer, Euklidiska geometri

2. a) 10 lika karameller, 3 barn: $\binom{12}{10} = \binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$

   b) 10 olika karameller, 3 barn: $3^{10}$

3. 


$|BE| = |CE| = 6$

$|AE|^2 + |CE|^2 = |AC|^2 \Rightarrow |AE| = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

Bisektrissatsen ger: $\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|BD|}$

$\Rightarrow \frac{8}{10} = \frac{x}{6-x} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}, \; 6 - x = \frac{10}{3}$

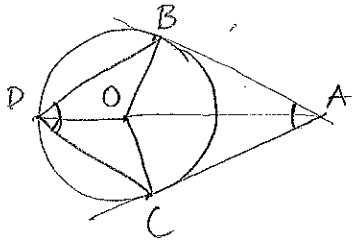
$\Rightarrow |BD| = |CF| = \frac{10}{3}, \; |DE| = |EF| = \frac{8}{3}$

4. Vi låter $E_i$ vara talen $1, 2, \ldots, 3000$ som är delbara med talet $i$. Antalet tal som ej är delbara med 2, 3 eller 5 är $3000 - \# E_2 \cup E_3 \cup E_5$

Inklusion-exklusion ger:

$\# E_2 \cup E_3 \cup E_5 = S_1 - S_2 + S_3 = \# E_2 + \# E_3 + \# E_5 - (\# E_2 \cap E_3 + \# E_2 \cap E_5 + \# E_3 \cap E_5) + \# E_2 \cap E_3 \cap E_5 = \# E_2 + \# E_3 + \# E_5 - (\# E_6 + \# E_{10} + \# E_{15}) + \# E_{30} = 1500 + 1000 + 600 - (500 + 300 + 200) + 100 = 2200$

Antalet tal ej delbara med 2, 3 eller 5 är då $3000 - 2200 = 800$.

5. 


$(\angle OBA)^\circ = (\angle OCA)^\circ = 90^\circ$ (radie-tangent)

$(\angle BAC)^\circ = 96^\circ$

Fyrhörningen ABOC har vinkelsumma $360^\circ$

vilket ger $(\angle BOC)^\circ = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - 96^\circ = 84^\circ$

Peripeivinkelsatsen ger $(\angle BDC)^\circ = \frac{1}{2} \cdot (\angle BOC)^\circ = 42^\circ$

6. Stryktipset: 13 matcher, tre val vid varje match.

Minst 11 rätt?

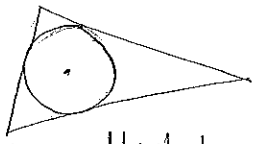
Exakt 13 rätt: 1 sätt

Exakt 12 rätt: välj 12 matcher av 13 med rätt resultat; det görs på 13 sätt. På den trettonde matchen finns det 2 sätt att tippa fel. Så det finns $13 \cdot 2 = 26$ rader med exakt 12 rätt.

Exakt 11 rätt: välj 11 matcher av 13 med rätt resultat; det görs på $\binom{13}{11} = \frac{13 \cdot 12}{2} = 78$ sätt. Sedan finns det $2^2 = 4$ sätt att tippa fel på de två matcherna med fel resultat. Så det finns $78 \cdot 4 = 312$ rader med exakt 11 rätt.

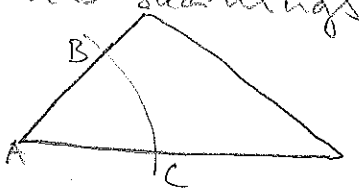
Alltså finns det $1 + 12 + 312 = 339$ rader med minst 11 rätt.

7. Konstruera med passare och linjal en inskriven cirkel till en triangel:

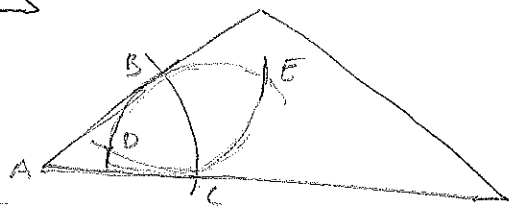


Först måste vi hitta den sökta cirkelns medelpunkt. Medelpunkten måste ha samma avstånd till alla tre sidor i triangeln, dvs medelpunkten måste ligga på bisektrisernas skärningspunkt.

Konstruktion av bisektris:




Dra cirkel med passarens spets i A, vi får skärningspunkten B och C.



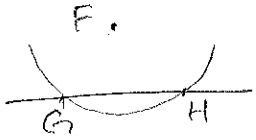

Dra cirkel med passarens spets i B genom C samt en cirkel med passarens spets i C genom B

Vi får två skärningspunkter D och E.

Dra linje genom A – D – E – detta är bisektrisen

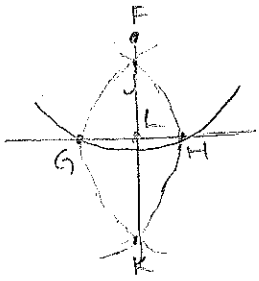
Konstruera två bisektriser till två av hörnen i triangeln, dessa skär varandra i den sökta cirkelns medelpunkt.

Bestäm nu cirkelns radie: dvs, konstruera vinkelrät linje till given linje genom given punkt F:




Dra cirkel genom F som skär linjen i två punkter G och H

Dra cirkel med passarens spets i G genom H och en cirkel med passarens spets i H genom G, detta ger två nya skärningspunkter J och K

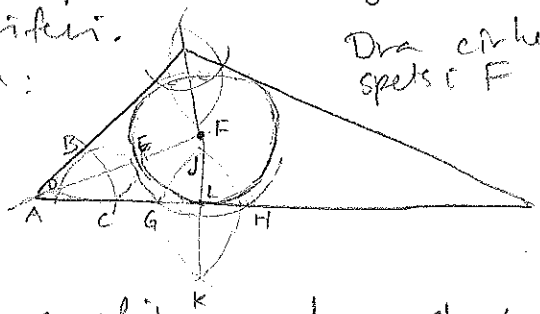



Dra linjen genom F – J – K – detta ger en ny skärningspunkt L

Om F är den sökta cirkelns medelpunkt så ligger L på cirkelns periferi.

Dra cirkeln med passarens spets i F genom L.

Sammanslagen bild:




8. DUNDERHONUNG

DUNERHOG
DUN
N

Hur många olika ord med tre bokstäver?

<u>Fall 1</u> utan dubletter: DUNERHOG $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

<u>Fall 2</u> en dublett: DD, UU, NN — <u>Tre</u> val av dublett bokstav, placera dessa två dubletter i två av tre lådor, sista lådan fylls av en av övriga sju bokstäver: $3 \cdot \binom{3}{2} \cdot 7 = 3 \cdot 3 \cdot 7 = 63$

<u>Fall 3</u> Tre N $\Rightarrow$ 1

<u>Svar:</u> $336 + 63 + 1 = 400$ olika ord med tre bokstäver.