

MATEMATIK, Göteborgs universitet
Tentamen Aritmetik och algebra 7,5hp
LGMA10, L9MA10, VT19, Laura Fainsilber (tel. x3560)
2019-03-20, kl.8.30-12.30

Hjälpmedel: inga hjälpmedel.

Förklara hur du resonerar och räknar. Poäng ges inte för bara svaren, utan för kvalitet och förklaring av lösningarna.

Du som är godkänd på alla **tre** inlämningsuppgifter behöver inte svara på den preliminära delen och behöver 15p från G-delen för att bli godkänd.

Du som är godkänd på **två** inlämningsuppgifter svarar på preliminärdelen och behöver minst 15p från G-delen och totalt 17p från preliminärdelen och G-delen.

Du som är godkänd på färre än två veckouppgifter behöver minst 15p från G-delen och totalt 19p från preliminärdelen och G-delen.

För betyget VG krävs godkänd och 22p från G-delen och VG-delen.

• **Preliminär del:** (8p)

P-1 Skriv 2019 i det binära talsystemet och i 16-bas. (2p)

P-2 Ge ett exempel på en funktion som är bijektiv, och ett som är surjektiv men inte injektiv. Ange definitionsmängd och målmängd. (3p)

P-3 Beskriv hur strukturen i ett induktionsbevis ser ut. (3p)

• **Frågor för betyget G (och VG):** (20p)

G-1 Skissa grafen för funktionen $f(x) = |(x + 4)(x - 2)|$ och lös olikheten $f(x) \geq 4$. Visa hur du tolkar olikheten på grafen. (4p)

G-2 Hitta entalsciffran i talet 203^{2019} . (4p)

G-3 Betrakta ekvationen $z^p + i = 0$ för olika värden på heltalet p . (4p)

För vissa värden på heltalet p är $z_1 = \cos \frac{\pi}{20} + i \sin \frac{\pi}{20}$ en lösning till ekvationen.

a. Visa att detta gäller för $p = 30$, dvs. visa att z_1 är en lösning till $z^{30} + i = 0$

b. Bestäm alla heltalsvärden på p för vilka z_1 är en lösning till ekvationen $z^p + i = 0$

c. Illustrera uppgiften med en skiss i det komplexa talplanet.

G-4 Bevisa att om heltalen a och b är delbara med d , så är även $a + b$ och $a - b$ delbara med d (4p)

G-5 Ge exempel på polynom (ett för varje kategori) som är (4p)

a. irreducibelt över \mathbb{C}

b. reducibelt över \mathbb{R} , av jämnt grad med minst två imaginära nollställen

c. irreducibelt över \mathbb{Q} men reducibelt över \mathbb{R}

d. reducibelt över \mathbb{Q} men utan rationella nollställen

V.G. Vänd för VG-frågor!

• **Frågor för betyget VG:** (10p)

- VG-1
- Beskriv i en sats för vilka heltal n som kvadratroten \sqrt{n} är ett rationellt tal.
 - Beskriv i en sats för vilka heltal n som tredje roten $\sqrt[3]{n}$ är ett rationellt tal.
 - Bevisa att $\sqrt[3]{3}$ inte är rationellt. (5p)

VG-2 Kom ihåg sambandet mellan rötter och koefficienter för kvadratiska ekvationer: För ett polynom $x^2 + px + q$ med nollställe α_1 och α_2 gäller att $p = -(\alpha_1 + \alpha_2)$ och $q = \alpha_1 \cdot \alpha_2$. Du skall titta på motsvarande samband för polynom av högre grad.

- Skriv upp de fullständiga sambanden mellan rötterna och koefficienterna för fjärdegradspolynomet $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$.
- Vad kan du skriva för samband för polynom av grad n ? (5p)

Lycka till!

Laura