MATEMATIK, Göteborgs universitet

Tentamen Aritmetik och algebra 7,5hp

LGMA10, L9MA10, VT19, Laura Fainsilber (tel. x3560)

2019-03-20, kl.8.30-12.30

Hjälpmedel: inga hjälpmedel.

Förklara hur du resonerar och räknar. Poäng ges inte för bara svaren, utan för kvalité och förklaring av lösningarna.

- **Preliminär del:** (8p)

P-1 *Skriv 2019 i det binära talsystemet och i 16-bas*: $2019_{10} = 11111100011_2 = 7E3_{16}$ där E betecknar talet 14 i 16-bas. (2p)

P-2 *Ge ett exempel på en funktion som är bijektiv, och ett som är surjektiv men inte injektiv. Ange definitionsmängd och målmängd.* (3p)

$f(x) = x$ är bijektiv från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$.

$f(x) = x^2$ är surjektiv men in inte injektiv från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}^+$ (mängden av de icke-negativa reella talen) eftersom varje icke-negativt tal är kvadraten av ett reellt tel (eller två).

P-3 *Beskriv hur strukturen i ett induktionsbevis ser ut.* (3p)

- Först skriver man ner ett **påstående** $P(n)$ som man vill visa gäller för alla naturliga tal n.
- Sedan visar man att ett **basfall** stämmer, ofta $P(1)$
- I **induktionssteget** börjar man med ett **induktionsantagande** (att något $P(k)$ stämmer) och visar att detta medför att även $P(k+1)$ stämmer
- I **slutsatsen** avslutar man med att dra slutsatsen att eftersom $P(1)$ stämmer och att, oavsett k, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, så stämmer $P(n)$ för varje naturligt tal $n \geq 1$.

- **Frågor för betyget G (och VG):** (20p)

G-1 *Skissa grafen för funktionen $f(x) = |(x+4)(x-2)|$ och lös olikheten $f(x) \geq 4$. Visa hur du tolkar olikheten på grafen.* *(4p)* .

Man får en parabel med nollställen vid $x = -4$ och $x = 2$, men den del som ligger under x-axeln är speglad uppåt. Olikheten tolkas genom att titta på de delar av grafen som ligger ovanför den vågräta linjen $y = 4$.

G-2 *Hitta entalssiffran i talet 203^{2019}.* *(4p)*

$203 \equiv 3(mod 10)$ så vi tittar på potenser av 3. $3^2 = 9$, $3^3 = 7$, $3^4 = 1$, med det kan vi skriva $3^{2016} = (3^4)^{504} \equiv 1$, så $3^{2019} = 3^{2016} \cdot 3^3 = 7$. Så entalssiffran i 203^{2019} är 7

G-3 OBS! Uppgiften bygger på en uppgift i Nationella Prov för Matematik 4, 2013

Betrakta ekvationen $z^p + i = 0$ för olika värden på heltalet p. *(4p)*

För vissa värden på heltalet p är $z_1 = \cos\frac{\pi}{20} + i\sin\frac{\pi}{20}$ en lösning till ekvationen.

a. *Visa att detta gäller för $p = 30$, dvs. visa att z_1 är en lösning till $z^{30} + i = 0$*
Det komplexa talet z_1 har absolutbelopp 1 och argument $\frac{\pi}{20}$. Så z_1^{30} har absolutbelopp 1 och argument $30 \cdot \frac{\pi}{20} = \frac{3\pi}{2}$, dvs $z_1^{30} = -i$.

b. *Bestäm alla heltalsvärden på p för vilka z_1 är en lösning till ekvationen $z^p + i = 0$*
Observera att $z_1^{40} = 1$ eftersom $40 \cdot \frac{\pi}{20} = 2\pi$. Så $z_1^p = -i$ för $p \equiv 30 (mod 40)$, t.ex. $p = -10,\ 30,\ 70, \ldots.$

c. *Illustrera uppgiften med en skiss i det komplexa talplanet.*
Rita enhetscirkeln, placera z_1 och i, visa några potenser av z_1, t.ex. z_1^2, z_1^3, z_1^4, $z_1^{10} = i$

G-4 *Bevisa att om heltalen a och b är delbara med d, så är även $a + b$ och $a - b$ delbara med d* *(4p)*

Enligt definitionen av delbarhet finns heltal e och f sådana att $a = de$ och $b = df$. Vi kan nu skriva $a + b$ som $de + df$, dvs $d(e + f)$ och $a - b$ som $de - df$, dvs $d(e - f)$, vilket innebär (enligt definitionen igen) att $a + b$ och $a - b$ är båda delbara med d.

Fallet $a + b$ kan även illustreras med rektanglar med samma höjd d och area a och b som man sätter ihop till en rektangel med area $a + b$.

G-5 *Ge exempel på polynom (ett för varje kategori) som är* *(4p)*

a. *irreducibelt över* $\mathbb{C}$: $X + 1$ eller linjärt polynom som helst.

b. *reducibelt över* $\mathbb{R}$, *av jämn grad med minst två imaginära nollställen* $(X^2 + 1)(X^2 - 1)$ eller $(X^2 + 1) \cdot P(X)$ där $P(X)$ har reella koefficienter och jämn grad (minst 2).

c. *irreducibelt över* $\mathbb{Q}$ *men reducibelt över* $\mathbb{R}$: $X^2 - 2$, irreducibelt över $\mathbb{Q}$ eftersom $\sqrt{2}$ är irrationnellt.

d. *reducibelt över* $\mathbb{Q}$ *men utan rationella nollställen* : $(X^2 - 2)(X^2 - 3)$, måste ha grad minst 4.

V.G. Vänd för VG-frågor!

- **Frågor för betyget VG:** (10p)

VG-1 a. *Beskriv i en sats för vilka heltal n som kvadratroten $\sqrt{n}$ är ett rationellt tal.*
Kvadratroten $\sqrt{n}$ är ett rationellt tal om talet n är kvadraten till ett heltal, dvs om alla primtal som är med i primtalsuppdelningen av n har jämn exponent där. Till exempel $n = 2^2,\ n = 2^2 \cdot 7^2,\ n = 2^2 \cdot 13^4 \cdot 31^6$

b. *Beskriv i en sats för vilka heltal n som tredje roten $\sqrt[3]{n}$ är ett rationellt tal.*
Tredje roten $\sqrt[3]{n}$ är ett rationellt tal om talet n är kubenen till ett heltal, dvs om alla primtal som är med i primtalsuppdelningen av n har exponent en multipel av 3. Till exempel $n = 2^3,\ n = 2^3 \cdot 7^3,\ n = 2^3 \cdot 13^9 \cdot 31^6$

c. *Bevisa att $\sqrt[3]{3}$ inte är rationellt.* (5p)
Beviset följer samma struktur som beviset för irrationaltieten av $\sqrt{2}$. Anta att man kan skriva $\sqrt[3]{3} = \frac{a}{b}$ med a, b heltal, SGD$(a, b) = 1$.
Då är $a^3 = 3b^3$ så a^3 är delbart med 3. Eftersom 3 är ett primtal måste då även a vara delbart med 3, vilket ger att a^3 egentligen är delbart med 27. Vi skriver då $a = 3a'$ och $a^3 = 27(a')^3 = 3b^3$. Om vi förkortar med 3 får vi $9(a')^3 = b^3$, så att även b^3 är delbart med 3, och därmed även b, vilket motsäger vårt val av a, b, som inte skulle ha något gemensam faktor större än 1.
Slutsatsen är att det inte finns lämpliga heltal a och b, dvs att $\sqrt[3]{3}$ inte kan skrivas som ett rationellt tal.

VG-2 *Kom ihåg sambandet mellan rötter och koefficienter för kvadratiska ekvationer: För ett polynom $x^2 + px + q$ med nollställe α_1 och α_2 gäller att $p = -(\alpha_1 + \alpha_2)$ och $q = \alpha_1 \cdot \alpha_2$. Du skall titta på motsvarande samband för polynom av högre grad.*

a. *Skriv upp de fullständiga sambanden mellan rötterna och koefficienterna för fjärdegradspolynomet $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$.*
Skriv ut en faktorisering (enligt faktorsatsen) $(x - \alpha)(x - \beta)(x + \gamma)(x - \delta)$ och multiplicera ut den.
Då får man $d = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta$,
$c = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma + \alpha \cdot \gamma \cdot \delta + \alpha \cdot \beta \cdot \delta + \beta \cdot \gamma \cdot \delta$
$b = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma + \alpha \cdot \delta + \beta \cdot \gamma + \beta \cdot \delta + \gamma \cdot \delta$
$a = \alpha + \beta + \gamma + \delta$

b. *Vad kan du skriva för samband för polynom av grad n?* (5p)
Du kan skriva den konstanta termen som produkt av alla nollställen, koefficienten för termen av grad $n - 1$ som summa av alla nollställen, och eventuellt några koefficienter däremellan, som är symetriska homogena polynom i nollställena. (homogent betyder att alla termer har samma grad, räknat med alla olika variabler).

Lycka till!

Laura