**MATEMATIK, Göteborgs universitet**

# Tentamen Aritmetik och algebra 7,5hp

**LGMA10, L9MA10, VT19, Laura Fainsilber (tel. x3560)**

**2019-08-23, kl.8.30-12.30**

Hjälpmedel: inga hjälpmedel. Telefonvakt: Jimmy Johansson x5325

Förklara hur du resonerar och räknar. Poäng ges inte för bara svaren, utan för kvalité och förklaring av lösningarna.

Du som är godkänd på alla **tre** inlämningsuppgifter behöver inte svara på den preliminära delen och behöver 15p från G-delen för att bli godkänd. Du som är godkänd på **två** inlämningsuppgifter svarar på preliminärdelen och behöver minst 15p från G-delen och totalt 17p från preliminärdelen och G-delen. Du som är godkänd på färre än två veckouppgifter behöver minst 15p från G-delen och totalt 19p från preliminärdelen och G-delen. För betyget VG krävs godkänd och 22p från G-delen och VG-delen.

- **Preliminär del:** (8p)

P-1 Skriv talet 2019 i det binära talsystemet. (3p)

P-2 Vad är ett rationellt tal? (Ange definitionen.) (2p)

P-3 Det är fredag idag. Vilken veckodag blir det 23 augusti 2022 (dvs om 1096 dagar)? Glöm inte att förklara hur du räknar! (3p)

- **Frågor för betyget G (och VG):** (20p)

G-1 Ange alla primtal upp till 120. (4p)
Visa hur du får fram dem (t.ex. med hjälp av Eratosthenes såll).

G-2 Formulera faktorsatsen och ge ett exempel på vad den innebär. (4p)

G-3 Fibonaccitalen $F(n)$ anges av att $F(1) = F(2) = 1$ och $F(k) = F(k-1) + F(k-2)$ för $k \geq 3$. Bevisa med induktion att (4p)

$$F(n+2) = 1 + \sum_{k=1}^{n} F(k)$$

för varje naturligt tal $n$.

G-4 Hitta alla komplexa lösningar till ekvationen $z^6 = -7$ och rita ut dem i det komplexa talplanet. (4p)

G-5 Låt $f_{a,b}(x) = |(x-a)^2 + b|$ vara en funktion av variabeln $x$ med parametrar $a$ och $b$. Till exempel är $f_{4,6}(x) = |(x-4)^2 + 6|$. (4p)
Skissa grafen för funktionerna $f_{4,6}(x)$, $f_{4,-6}(x)$, $f_{-4,6}(x)$ och $f_{-4,-6}(x)$.
Förklara hur du kan skissa $f_{a,b}(x)$ för olika värden av $a$ och $b$ genom att använda dig av att uttrycket för $f_{a,b}(x)$ är i kvadratkompletterad form.

V.G. Vänd för VG-frågor!

- **Frågor för betyget VG:** (10p)

VG-1 Låt $k$ vara ett ett positivt tal och betrakta följande funktion, som vi definierar för $x > k$. (5p)

$$f_k(x) = \frac{x}{x-k}$$

Denna funktion har en invers, $f_k^{-1}(x)$.

Hitta ett uttryck för funktionen $f_k^{-1}$ och bestäm dess definitionsmängd.

Utred hur skärningspunkter mellan graferna för $f_k$ och $f_k^{-1}$ beror på $k$. Du kan börja med att undersöka specialfallen $k = 2$ och $k = 1$.

VG-2 Bevisa att ett tal är delbart med 11 om endast om talets alternerande siffersumma är delbar med 11. Den alternerande siffersumman fås genom att addera varannan siffra i talet med början vid entalssiffran och subtrahera de övriga siffrorna (där talet står skrivet i decimalform). Till exempel för talet 21835 är den alternerande siffersumman $a = 5 + 8 + 2 - 3 - 1 = 11$. (5p)

**Lycka till!**

**Laura**

# Förslag till lösningar, Aritmetik och algebra 2019.08.23

## Preliminär del.

**P-1**: $2019_{10} = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 0 + 0 + 0 + 2 + 1$

$= 11111100011_2$

(kan även ses som $2048 - (16 + 8 + 4 + 0 + 1)$

$= 100000000000 - 11101$ )

**P-2** Ett rationellt tal är ett bråk av två heltal

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,,\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$

**P-3** Vi räknar 1096 modulo 7 för att se hur många dagar som går, mer än hela veckor:

$$\begin{array}{r|l} 1096 & 7 \\ -7 & 156 \\ \hline 39 & \\ -35 & \\ \hline 46 & \\ -42 & \\ \hline 4 & \text{rest} \end{array}$$

så 23 aug. 2022 är om 156 veckor och 4 dagar, alltså en tisdag.

# Godkänd del

## G-1

Jag använder Erastothenes såll, alltså stryker alla multipler av 2, 3, 5, 7, 11 bland talen upp till 120. Detta räcker för att stryka alla sammansatta tal upp till $11^2 = 121$.
(egentligen räcker det att stryka multipler av 2, 3, 5, 7.)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 | ~~6~~ | 7 | ~~8~~ | ~~9~~ | ~~10~~ |
| 11 | ~~12~~ | 13 | ~~14~~ | ~~15~~ | ~~16~~ | 17 | ~~18~~ | 19 | ~~20~~ |
| ~~21~~ | ~~22~~ | 23 | ~~24~~ | ~~25~~ | ~~26~~ | ~~27~~ | ~~28~~ | 29 | ~~30~~ |
| 31 | ~~32~~ | ~~33~~ | ~~34~~ | ~~35~~ | ~~36~~ | 37 | ~~38~~ | ~~39~~ | ~~40~~ |
| 41 | ~~42~~ | 43 | ~~44~~ | ~~45~~ | 46 | 47 | ~~48~~ | ~~49~~ | ~~50~~ |
| ~~51~~ | ~~52~~ | 53 | ~~54~~ | ~~55~~ | ~~56~~ | ~~57~~ | 58 | 59 | ~~60~~ |
| 61 | | ~~63~~ | | ~~65~~ | | 67 | | ~~69~~ | |
| 71 | | 73 | | ~~75~~ | | ~~77~~ | | 79 | |
| 81 | | 83 | | ~~85~~ | | ~~87~~ | | 89 | |
| ~~91~~ | | ~~93~~ | | ~~95~~ | | 97 | | ~~99~~ | ~~100~~ |
| 101 | | 103 | | ~~105~~ | | 107 | | 109 | |
| ~~111~~ | | 113 | | ~~115~~ | | ~~117~~ | | ~~119~~ | ~~120~~ |

jag slutar skriva de jämna talen

Primtalen är de tal större än 1 som inte är strykna:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113.

G2 **Faktorsatsen:** Låt $P(x)$ vara ett polynom.
Låt $a$ vara ett tal.

Polynomet $P(x)$ är delbart med polynomet $x-a$

$$\Updownarrow$$

Talet $a$ är ett nollställe för polynomet $P$, dvs $P(a)=0$

---

Exempel:

Om $P(x)=(x-3)(x+5)(x+12)$, så vet jag att $3, -5, -12$ är nollställe till $P$

Å andra sidan, om jag ser att $P(3)=0$, så kan jag faktorisera $P(x)=(x-3)\cdot Q(x)$.

G–3 Fibonacci tal

$F(1) = F(2) = 1$

$F(k) = F(k-1) + F(k-2)$ för $k \geq 3$.

t.ex $F(3) = 1+1 = 2$, $F(4) = 3$, $F(5) = 5$, $F(6) = 8$, $F(7) = 13$

Jag vill visa att $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad F(n+2) = 1 + \sum_{k=1}^{n} F(k)}$

med induktion.

Bevis:

Basfall : $n = 1$

$$F(3) = 1 + \sum_{k=1}^{1} F(k) = 1 + F(1) = 2 \quad : \text{stämmer.}$$

jag kollar även några fall till:

$$F(4) = 1 + \sum_{k=1}^{2} F(k) = 1+1+1 = 3 \quad \text{stämmer.}$$

$$F(5) = 1 + \sum_{k=1}^{3} F(k) = 1+1+1+2 = 5, \text{ stämmer.}$$

Induktionssteg.

Antag att likheten $F(s+2) = 1 + \sum_{k=1}^{s} F(k)$ för något tal $s$.

Vi vill vissa att motsvarande likhet gäller även för $s+1$:

$$F((s+1)+2) = F(s+3) = F(s+2) + F(s+1) \text{ enligt definition av Fibonaccital.}$$

$$= \left(1 + \sum_{k=1}^{s} F(k)\right) + F(s+1) \text{ enligt antagandet}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{s+1} F(k) \quad \text{(skriver om summan med sista termen)}$$

vilket är den eftertraktade likheten för $s+1$.

Slutsats : likheten gäller för alla $n$: $F(n+2) = 1 + \sum_{k=1}^{n} F(k)$

(64)

Vi skall lösa ekvationen $z^6 = -7$

Vi skriver det komplexa talet $-7$ i polär form:

$$-7 = 7 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi) = 7 \cdot (-1 + i \cdot 0)$$

så $|-7| = 7$ och $\arg(-7) = \pi$

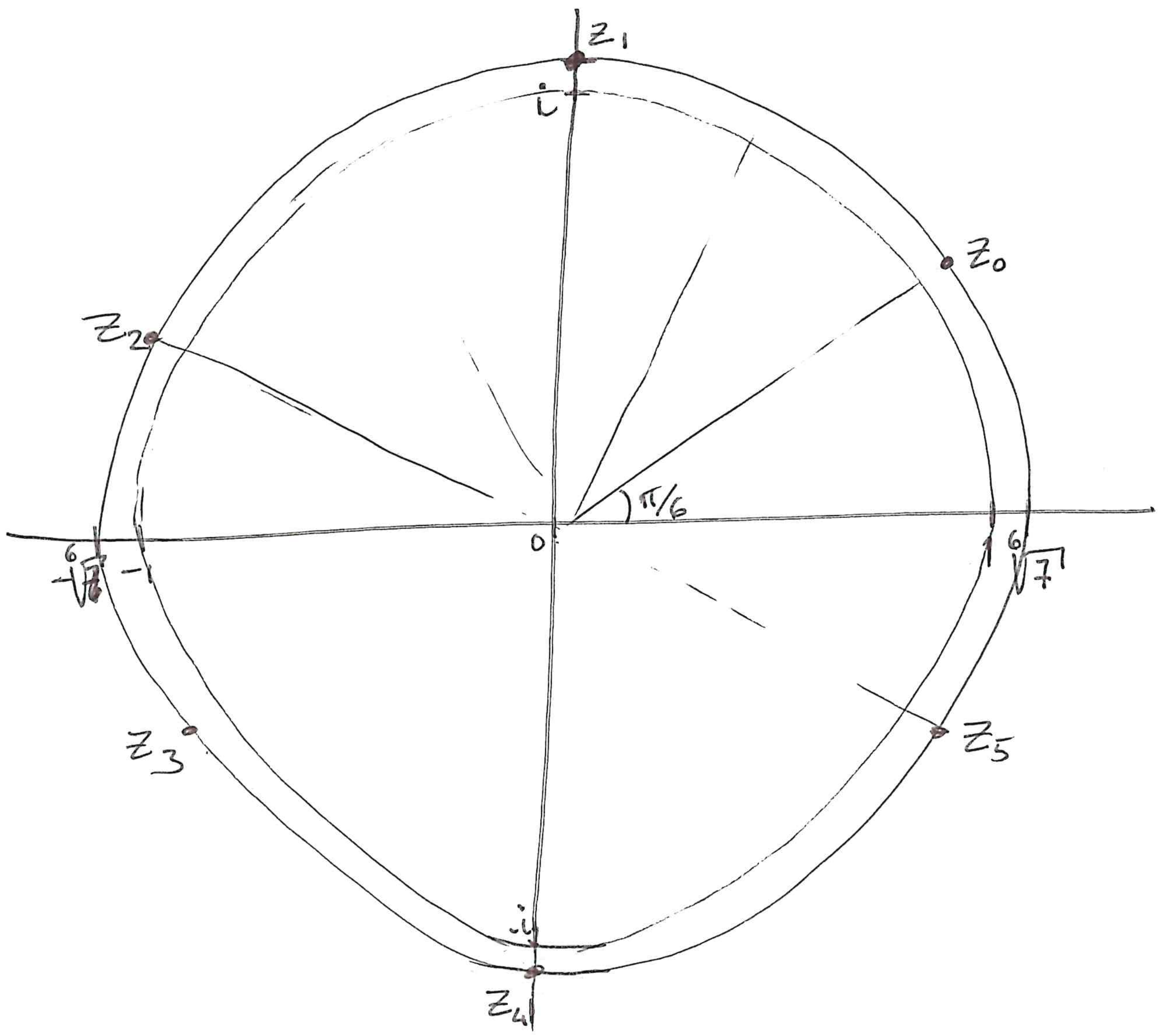
Så vi hittar de 6 lösningarna till ekvationen

$$z_0 = \sqrt[6]{7} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

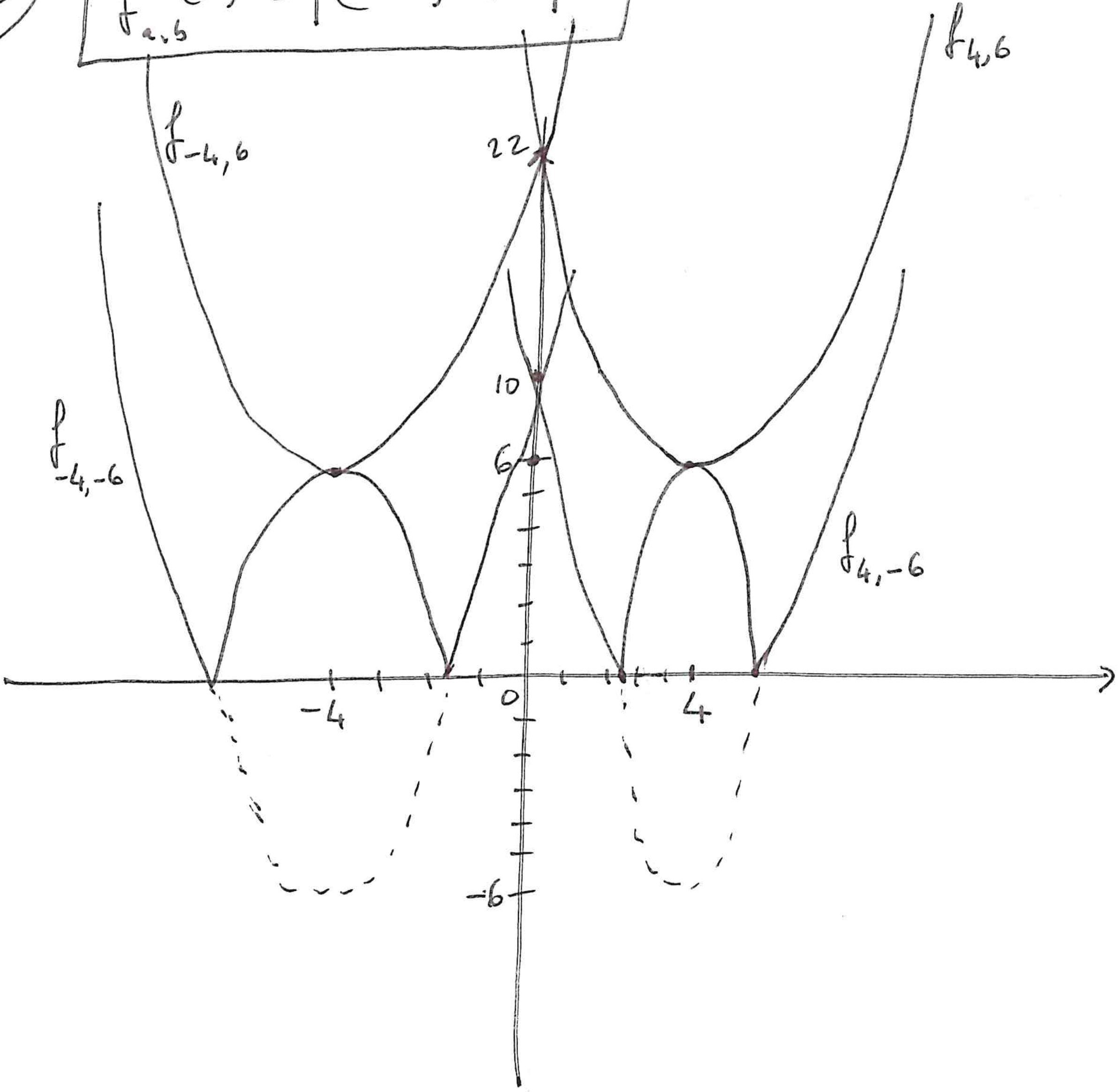
$$z_1 = \sqrt[6]{7} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{6}\right)\right)$$

$$\vdots$$

$$z_5 = \sqrt[6]{7} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{10\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{10\pi}{6}\right)\right)$$



G.5 $\boxed{f_{a,b}(x) = |(x-a)^2 + b|}$




funktionen är absolutbeloppet av en parabel med minimipunkt i $x = -a$ , $y = b$. Jag skissar först parabeln $(x-a)^2 + b$ , speglar sedan upp den del av grafen som ligger under x-axeln.

VG 1 $\quad f_k(x) = \frac{x}{x-k} = \frac{x-k+k}{x-k} = 1 + \frac{k}{x-k}$ $\quad k>0$, $x>k$.

OBS: definitionsmängd: $x : x>k$ så nämnaren är positiv.

$f_k^{-1}$: låt $y = \frac{x}{x-k}$ Då vill vi skriva $x = f^{-1}(y)$

$$xy - ky = x \iff xy - x = ky$$
$$\iff x(y-1) = ky$$
$$x = \frac{ky}{y-1}$$

Definitionsmängd för $f^{-1}$: $y \neq 1$

egentligen $y > 1$, motsvarar $x > k$.

Vi skriver om $f^{-1}$ som funktion av $x$ för att rita båda funktioner i samma koordinatsystem:

$f_k^{-1}(x) = \frac{kx}{x-1}$

Skärningspunkter mellan $f_k$ och $f_k^{-1}$:

$$f_k(x) = f_k^{-1}(x) \iff \frac{x}{x-k} = \frac{kx}{x-1}$$
$$\iff x\cdot(x-1) = kx(x-k)$$
$$\iff x-1 = k(x-k) \quad \text{för } x \neq 0\text{, vilket den är i definitionsmängd}$$
$$\iff x - kx = 1-k^2$$
$$\iff x(1-k) = (1-k)(1+k)$$
$$\iff x = 1+k \quad \text{för } k \neq 1$$

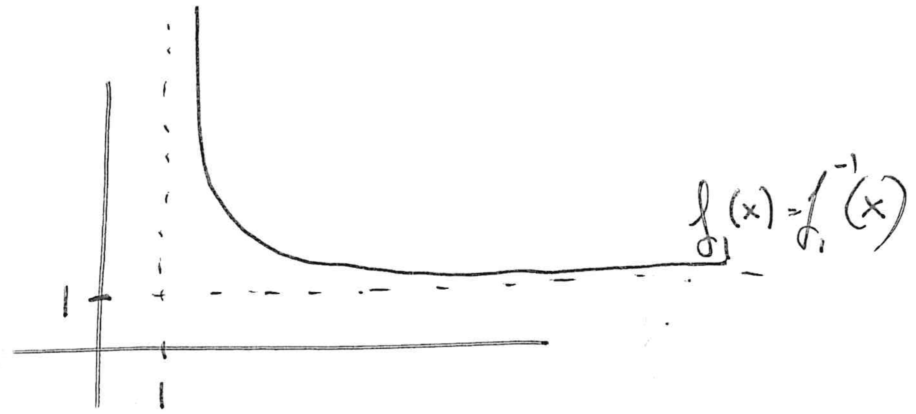
Vi observerar att för $k=1$, så är $f_1 = f_1^{-1}$

Så för $k = 1$ : funktionerna sammanfaller.

för $k \neq 1$ : funktionerna har en skärningspunkt i $x = k+1$ , $y = k+1$

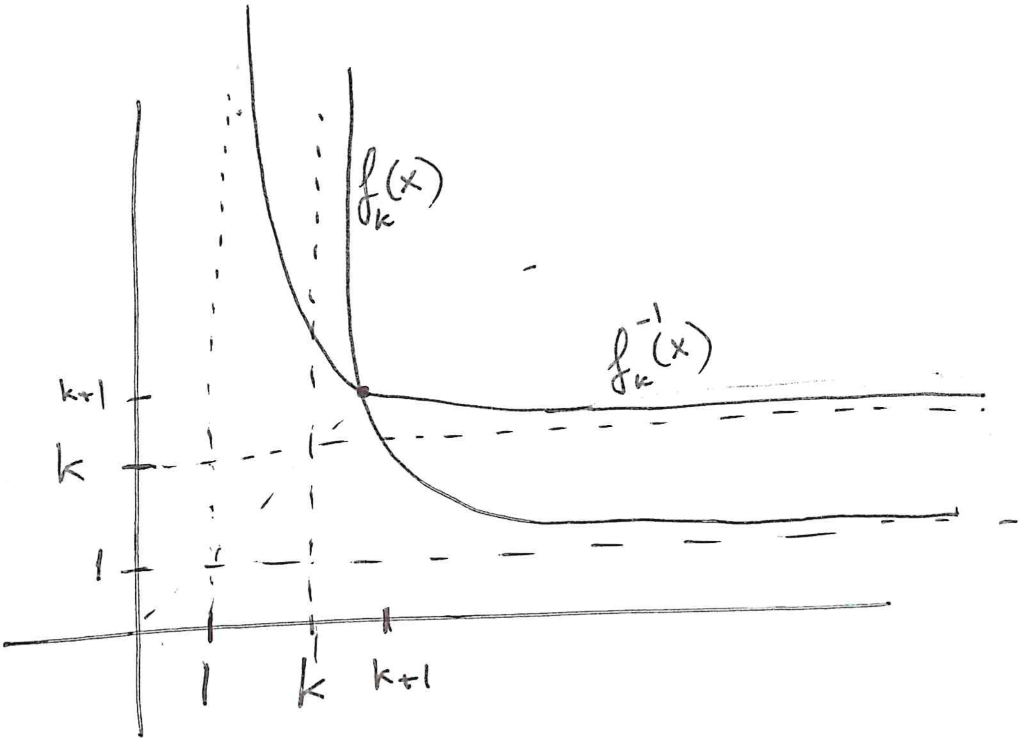
grafiskt

$k = 1$:




$k \neq 1$

(OBS! $k > 1$ eller $0 < k < 1$)



VG 2 Skriv tal i 10-bas, med 10-potenser:

t.ex $abcde = a \cdot 10^4 + b\,10^3 + c\,10^2 + d \cdot 10 + e \cdot 1$

Observera att $10 \equiv -1 \mod 11$

och $10^n \equiv -1^n \mod 11$,

dvs $10^n = +1 \mod 11$ för $n$ jämn.

$10^n = -1 \mod 11$ för $n$ udda.

så $abcde \equiv -a + b - c + d - e$ modulo 11.

och mer allmänt är ett tal kongruent med dess alternerande siffersumma, modulo 11.

Speciellt är talet delbart med 11 om det är kongruent med 0 modulo 11, dvs om även den alternerande summan är det.