

**MATEMATIK, Göteborgs universitet**  
**Tentamen Aritmetik och algebra 7,5hp**  
**LGMA10, L9MA10, VT19, Laura Fainsilber (tel. x3560)**  
**2019-08-23, kl.8.30-12.30**

Hjälpmedel: inga hjälpmedel.

Telefonvakt: Jimmy Johansson x5325

Förklara hur du resonerar och räknar. Poäng ges inte för bara svaren, utan för kvalitet och förklaring av lösningarna.

Du som är godkänd på alla **tre** inlämningsuppgifter behöver inte svara på den preliminära delen och behöver 15p från G-delen för att bli godkänd. Du som är godkänd på **två** inlämningsuppgifter svarar på preliminärdelen och behöver minst 15p från G-delen och totalt 17p från preliminärdelen och G-delen. Du som är godkänd på färre än två veckouppgifter behöver minst 15p från G-delen och totalt 19p från preliminärdelen och G-delen. För betyget VG krävs godkänd och 22p från G-delen och VG-delen.

• **Preliminär del:** (8p)

P-1 Skriv talet 2019 i det binära talsystemet. (3p)

P-2 Vad är ett rationellt tal? (Ange definitionen.) (2p)

P-3 Det är fredag idag. Vilken veckodag blir det 23 augusti 2022 (dvs om 1096 dagar)?  
Glöm inte att förklara hur du räknar! (3p)

• **Frågor för betyget G (och VG):** (20p)

G-1 Ange alla primtal upp till 120. (4p)  
Visa hur du får fram dem (t.ex. med hjälp av Eratosthenes såll).

G-2 Formulera faktorsatsen och ge ett exempel på vad den innebär. (4p)

G-3 Fibonaccitalen  $F(n)$  anges av att  $F(1) = F(2) = 1$  och  $F(k) = F(k-1) + F(k-2)$  för  $k \geq 3$ . Bevisa med induktion att (4p)

$$F(n+2) = 1 + \sum_{k=1}^n F(k)$$

för varje naturligt tal  $n$ .

G-4 Hitta alla komplexa lösningar till ekvationen  $z^6 = -7$  och rita ut dem i det komplexa talplanet. (4p)

G-5 Låt  $f_{a,b}(x) = |(x-a)^2 + b|$  vara en funktion av variabeln  $x$  med parametrar  $a$  och  $b$ .  
Till exempel är  $f_{4,6}(x) = |(x-4)^2 + 6|$ . (4p)

Skissa grafen för funktionerna  $f_{4,6}(x)$ ,  $f_{4,-6}(x)$ ,  $f_{-4,6}(x)$  och  $f_{-4,-6}(x)$ .

Förklara hur du kan skissa  $f_{a,b}(x)$  för olika värden av  $a$  och  $b$  genom att använda dig av att uttrycket för  $f_{a,b}(x)$  är i kvadratkompletterad form.

V.G. Vänd för VG-frågor!

• **Frågor för betyget VG: (10p)**

VG-1 Låt  $k$  vara ett positivt tal och betrakta följande funktion, som vi definierar för  $x > k$ . (5p)

$$f_k(x) = \frac{x}{x - k}$$

Denna funktion har en invers,  $f_k^{-1}(x)$ .

Hitta ett uttryck för funktionen  $f_k^{-1}$  och bestäm dess definitionsmängd.

Utred hur skärningspunkter mellan graferna för  $f_k$  och  $f_k^{-1}$  beror på  $k$ . Du kan börja med att undersöka specialfallen  $k = 2$  och  $k = 1$ .

VG-2 Bevisa att ett tal är delbart med 11 om endast om talets alternerande siffersumma är delbar med 11. Den alternerande siffersumman fås genom att addera varannan siffra i talet med början vid entalssiffran och subtrahera de övriga siffrorna (där talet står skrivet i decimalform). Till exempel för talet 21835 är den alternerande siffersumman  $a = 5 + 8 + 2 - 3 - 1 = 11$ . (5p)

**Lycka till!**

**Laura**