MATEMATIK,
Göteborgs universitet,
LGMA10, L9MA10

ARITMETIK
och
ALGEBRA

Innehållstabell

Avsnitt 1 – Olika typer av tal

Avsnitt 1

Olika typer av tal

För att räkna upp, numrera, räkna antal och jämföra används ofta ***naturliga tal***. Med vår vanliga decimalnotation (basen 10) skrivs dessa

$$0, 1, 2, 3, \ldots, 9, 10, 11, \ldots.$$

Samma naturliga tal kan skrivas med andra beteckningssystem. T.ex. kan de skrivas i basen 2 eller med romerska siffror:

$$\text{I, II, III, IV, V, VI}, \ldots.$$

Dessa tal kan användas för att räkna upp föremål i ordning eller för att räkna antal föremål eller för att jämföra antalet föremål i två olika samlingar av sådana.

Om a och b är naturliga tal kan de **adderas** till ett nytt naturligt tal: $a + b$ är det totala antalet föremål i två olika samlingar av föremål där den ena har a stycken och den andra b.

Talen a och b kan också **multipliceras** till ett nytt naturligt tal: $a \cdot b$ är det totala antalet föremål i a olika samlingar där varje samling innehåller b föremål vardera. Vid räkning med bokstäver skrivs $a \cdot b$ vanligen ab.

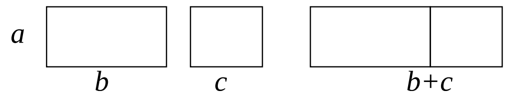
Följande **räknelagar** gäller för addition och multiplikation:

$$\begin{array}{ccc} (a+b)+c = a+(b+c) & \textbf{(associativitet)} & (ab)c = a(bc) \\ a+b = b+a & \textbf{(kommutativitet)} & ab = ba \\ 0+a = a & \textbf{(identitet)} & 1 \cdot a = a \end{array}$$

$$a(b+c) = (ab)+(ac) = ab+ac \ \textbf{(distributivitet)}$$

$$ab = 0 \text{ precis när något av } a \text{ eller } b \text{ är } = 0.$$

För att illustrerar distributiviteten kan man rita figuren



I detta sammanhang används konventionen att om addition och multiplikation förekommer i ett och samma uttryck ska multiplikation utföras före addition. T.ex. ska $3 \cdot 5 + 2$ betyda $(3 \cdot 5) + 2$ och **inte** $3(5 + 2)$ (vilket skulle innebära att additionen utfördes före multiplikationen).

För att svara på frågan "Hur mycket mer är a än b?" kan man använda ***subtraktion***. Svaret på frågan betecknas $a - b$. Här dyker självfallet problemet att a kan vara mindre än b upp. I så fall är subtraktionen inte möjlig så länge man håller sig till enbart naturliga tal.

För att svara på frågan "Hur många föremål innehåller varje hög om a föremål ska fördelas lika i b högar?" kan man använda ***division***. Svaret på frågan betecknas a/b, men division är självfallet inte alltid möjlig, så länge man håller sig till enbart naturliga tal. Divisionen går i allmänhet inte "jämnt ut".

Ett enkelt sätt att hantera problemet med subtraktion är att utöver de naturliga talen tänka sig att man även till varje sådant tal a har en negativ motsvarighet $-a$, med undantaget att $-0 = 0$. Man får då *heltalen*, som i decimalnotation skrivs:

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \ldots, \pm 9, \pm 10, \pm 11, \ldots.$$

Utvidgningen av talsystemet från naturliga till hela tal görs alltså för att kunna hantera subtraktion utan restriktioner.

Additionen av de nya och gamla talen definieras nu, om a och b är naturliga tal, som

$$\begin{aligned} a + (-b) &= \begin{cases} a - b & \text{om} \quad a \geq b \\ -(b - a) & \text{om} \quad a \leq b \end{cases} \\ (-a) + (-b) &= -(a + b). \end{aligned}$$

Subtraktionen $a - b$ kan nu skrivas $a + (-b)$. Lägg märke till vändningen: från att ha uppfattats som en särskild operation har nu subtraktionen blivit ett specialfall av addition. De tidigare räknereglerna för addition fortsätter nu att gälla även för addition av heltal. Utöver dessa har vi nu också

$a + (-a) = 0$ **(additiv invers, motsatta tal)** och $-(-a) = a.$

Multiplikation av de nya och gamla talen definieras nu om a och b är naturliga tal som

$$\begin{aligned} a(-b) &= -(ab) \\ (-a)b &= -(ab) \\ (-a)(-b) &= ab. \end{aligned}$$

Motiveringen till den första definitionen är ganska enkel: om en skuld b multipliceras med a blir den nya skulden ab. Den andra kan motiveras med att om ett kapital bestående av ett (stort) antal poster om vardera b kronor minskas med a poster, så görs en förlust av ab kronor. En liknande motivering till den tredje skulle kunna vara att om en skuld bestående av ett (stort) antal poster om vardera b kronor minskas med a poster, så görs en vinst av ab kronor.

En annan mindre intuitiv motiveringen till den tredje skulle kunna vara att den är en nödvändighet, om man vill att multiplikation av heltal alltid ska vara möjlig, och att samma räkneregler som tidigare ska fortsätta att gälla. T.ex. kan man då få

$$\begin{aligned}
(-a)(-b) &= 0+(-a)(-b) = (ab+(-(ab)))+(-a)(-b) = (ab+(-a)b)+(-a)(-b) = \\
&= ab+((-a)b+(-a)(-b)) = ab+(-a)(b+(-b)) = ab+(-a)\cdot 0 = ab
\end{aligned}$$

Konkret:

$$\begin{aligned}
81 &= 9\cdot 9 = (10+(-1))(10+(-1)) = 10\cdot 10+10(-1)+(-1)10+(-1)(-1) = \\
&= 100-10-10+(-1)(-1) = 80+(-1)(-1), \\
&\quad \text{så man ska ha} \qquad 1 = (-1)(-1).
\end{aligned}$$

Denna förklaring till varför $(-2)(-3)$ ska sättas till 6 hänvisar inte till intuitionen. Motiveringen är i stället att *det måste vara så för att vissa räkneregler ska gälla*.

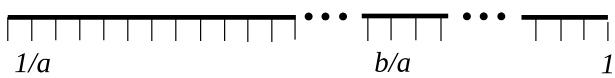
De tidigare räknereglerna för multiplikation fortsätter nu att gälla även för multiplikation av heltal. Likaså fortsätter distributiviteten att gälla.

Efter utvidgning från de naturliga talen till de hela talen med tillhörande räkneoperationer är alltså subtraktion inte bara alltid möjlig, utan rent av en särskild form av addition.

Även om nu problemet med subtraktion är löst återstår problemet att division inte alltid är möjlig. T.ex. är den inte möjligt att dela upp en skuld på 5 enheter i 2 lika stora poster. Divisionsproblemet är minst lika fundamentalt som subtraktionsproblemet. Inte minst för ett barn är problemet att dela lika på en given kvantitet förmodligen mer konkret och viktigt än det kanske mer abstrakta skuldbegreppet.

För att lösa divisionsproblemet kan vi göra på ett liknande sätt som när vi införde negativa (hel)tal. Till varje positivt heltal a inför vi $1/a$ och tanken är att $a(1/a)$ ska vara 1.

För att konkretisera det kan vi tänka oss att a är positivt att man delar en given sträcka (av längd 1) i a lika stora delar, där var och en av delarna då får längd $1/a$. Om då b är ett naturligt tal betyder b/a längden av b stycken sådana sträckor.



Om a och c är positiva heltal gäller i så fall att

$$cb/ca = b/a.$$

För om en given sträcka delas i ca lika delar och man lägger cb sådana i följd, får man samma sträcka som om man delar den givna sträckan i a delar och lägger b av dem i följd.

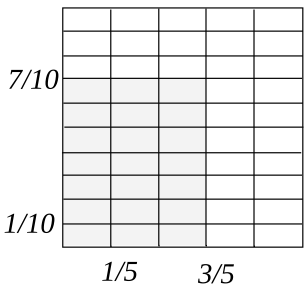
De ***rationella talen*** består av alla kvoter b/a där a och b är heltal och $a \neq 0$. Talet b kallas här *täljare* och talet a för nämnare. Talet b/a kallas också ett *rationellt bråk*. Observera att ett och samma rationella tal kan skrivas på oändligt många olika sätt eftersom $a/b = (ca)/(cb)$, för varje heltal c som inte är 0. (Man kan säga att det finns oändligt många “namn” på ett och samma rationella tal.)

Addition och multiplikation av sådana tal definieras enligt

$$\begin{aligned}\frac{b}{a} + \frac{b'}{a'} &= \frac{ba' + ab'}{aa'} \\ \frac{b}{a} \cdot \frac{b'}{a'} &= \frac{bb'}{aa'}\end{aligned}$$

Det är lättast att motivera dessa definitioner om vi håller oss till fallet där täljarna är ≥ 0 och nämnarna är > 0.

För att addera b/a och b'/a' kan vi först förlänga så att talen får samma nämnare: $b/a = (ba')/(aa')$ och $(ab')/(aa')$. Det först talet betyder då längden av ba' stycken sträckor av längd $1/aa'$, medan det andra betyder längden av ab' sådana sträckor. Additionen $b/a + b'/a'$ betyder då alltså längden av $ba' + ab'$ sådana sträckor, dvs $(ba' + ab')/(aa')$.



För att motivera multiplikationen kan vi tänka oss att vi har en kvadrat med given sida (av längd 1). Vi delar in basen i a och höjden i a' lika långa delar. Vi får då ett rutmönster i kvadraten bestående av aa' stycken lika stora rektanglar. Varje rektangel är alltså en $1/(aa')$-del av kvadraten. $(b/a)(b'/a')$ kan nu tolkas som att vi ska ha bb' sådana rektanglar, dvs $(bb')/(aa')$ delar av den ursprungliga kvadraten.

Rationella tal som kan skrivas $a/1$ skrivs normalt bara a (där a är ett heltal). På så vis är de vanliga heltalen med i systemet av rationella tal. För denna utvidgning av systemet av heltal till systemet av rationella tal och tillhörande addition och multiplikation fortsätter de tidigare räknereglerna att gälla.

Vi har dessutom

$\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$ (**multiplikativ invers**).

För de rationella talen är både subtraktion och division (med tal $\neq 0$) alltid möjlig och i själva verket specialfall av addition respektive multiplikation.

För subtraktion har vi

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{-c}{d} = \frac{ad + (-c)b}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

Division av a/b med $c/d \neq 0$ kan uppfattas som att vi ska lösa ekvationen $(c/d)x = (a/b)$ och vi ser, med räknereglerna ovan, att $x = (ad)/(cb)$ är lösningen. Mer konkret ser räkningarna ut så här

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} &= \{\text{ Förlängning med } \frac{d}{c}\} = \frac{\frac{a}{b}\frac{d}{c}}{\frac{c}{d}\frac{d}{c}} = \\ &= \frac{\frac{ad}{bc}}{\frac{cd}{dc}} = \frac{\frac{ad}{bc}}{1} = \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \end{aligned}$$

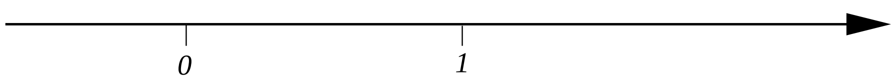
Division med $c/d \neq 0$ är alltså samma sak som multiplikation med d/c.

Det mest centrala systemet av tal i matematiken är de ***reella talen***. Liksom systemen av naturliga, hela och rationella tal har det uppstått från primitiva mänskliga aktiviteter – i detta fall från mätning och jämförelse av olika typer av storheter. Det kan till exempel vara fråga om mätning av längder och avstånd och vägning av vikter.

Jämförelse av två mått A och B på en storhet (t.ex. längd) kan i sin enklaste variant gå ut på att avgöra om A är större än B eller inte. Man kan säga att det här är fråga om en kvalitativ jämförelse.

Lite mer avancerat är att göra en kvantitativ jämförelse: “Hur mycket större än B är A?”. För att besvara denna typ av frågor utgår mänskligheten från *skalor*. När en enhet på en sådan skala fastlagts blir skalan en skala av tal. Det är förstås välbekant men anmärkningsvärt, att en enda typ av skala av tal kan användas för att beskriva en stor variation av kvalitativa jämförelser: avstånd, vikt, längd, temperatur, tid osv.

Den skala av tal, de reella talen, vi använder oss av brukar illustreras med en rät linje med ett valt origo (nollpunkt), en bestämd enhetspunkt och en (positiv) riktning. Man understryker alltså de reella talens användning som avståndsskala.



Att denna skala är så fundamental beror framför allt på att den är fullständig.

Om man tänkter sig att man illustrerar de rationella talen på en längdskala på samma sätt, kommer figuren att se likadan ut som den reella skalan. Mellan två rationella tal vilka som helst finns det nämligen oändligt många andra rationella tal. Ändå finns det luckor i den rationella tallinjen. En avgörande historisk upptäkt vara att längden av diagonalen i en kvadrat med sidan 1 **inte** kan mätas med ett rationellt tal. (Enligt Pythagoras sats är diagonalens längd $\sqrt{2}$ och det är ganska lätt att se att det inte finns något rationellt tal a/b vars kvadrat är 2.)

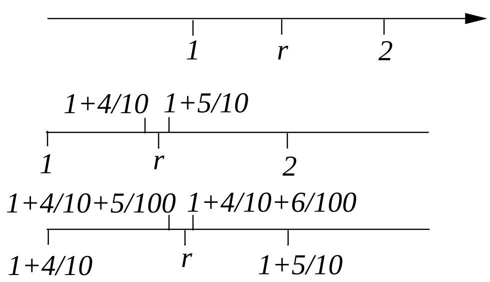
Fullständigheten hos de reella talen garanterar att den reella tallinjen inte har några sådana luckor.

När två föremål läggs i följd eller sida vid sida, är storleken av denna kombination summan av de två föremålens storlek, oavsett om det gäller deras vikt eller volym. Geometriskt består addition av att lägga sträckor (eventuellt med tecken eller riktning) i följd längs en linje. Denna geometriska operation motsvarar (aritmetisk) addition av reella tal.

Mått på olika typer av storheter kan i första omgången lätt multipliceras med heltal – för att multiplicera vikten av ett föremål med 3 kan man ta den gemensamma vikten av tre sådana föremål. Multiplikation med rationella tal kan sedan göras med uppdelning i lika tunga tiondedelar osv. Multiplikation med ett reellt tal kan sedan göras med hänvisning till de reella talens "kontinuitet". (Avgörande är att det till ett reellt tal alltid finns rationella tal godtyckligt nära det. Mer om detta nedan.) Algoritmer för att addera och multiplicera mått av storheter leder till (aritmetisk) addition och multiplikation av reella tal.

Liksom för det rationella talsystemet är subtraktion och division alltid möjlig och specialfall av addition och multiplikation. För att t.ex. räkna ut x/y där $y \neq 0$ ses det som är samma sak som $x \cdot (1/y)$.

Än så länge har vi inte skrivit upp de reella talen med siffror på samma sätt som vi gjort med de naturliga, hela och rationella talen.
Möjligheten att göra detta bygger på egenskapen att det till ett reellt tal r finns rationella tal som ligger godtyckligt nära det (även om r inte självt är ett rationellt tal).



För att inse detta när $r > 0$ väljer vi först det största heltalet $a \leq r$. Då ligger r mellan a och $a + 1$ d.v.s. $a \leq r < a+1$. Eftersom vi är vana att arbeta med namn på tal i basen 10 delar vi in sträckan från a till $a + 1$ i 10 lika delar vardera av längd $1/10$. Vi väljer det största heltal a_0 så att $a + a_0/10 \leq r$. Då ligger r mellan $a + a_0/10$ och $a + (a_0 + 1)/10$: $a + a_0/10 \leq r < a + (a_0 + 1)/10$. Vi lägger märke till att a_0 är ett heltal mellan 0 och 9, och fortsätter nu med att dela upp sträckan mellan $a + a_0/10$ och $a + (a_0 + 1)/10$ i 10 lika delar vardera av längd $1/100$ och väljer det största heltal a_1 så att $a + a_0/10 + a_1/100 \leq r$ och lägger märke till att a_1 är ett heltal mellan 0 och 9. Proceduren kan upprepas i evighet och vi får att

$$r = a + a_0/10 + a_1/100 + a_2/1000 + \cdots,$$

där a är ett heltal och $a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots$ är heltal mellan 0 och 9. Vårt vanliga sätt att skriva detta är

$$r = a, a_0 a_1 a_2 \ldots .$$

Vi säger att vi skrivit (eller utvecklat) r som ett (oändlig) decimaltal (decimalbråk). Det är viktigt att förstå att utvecklingen i allmänhet inte slutar med en oändlig sekvens av nollor.

Våra vanliga algoritmer för addition och multiplikation (av naturliga tal) fungerar av denna anledning inte i allmänhet för reella tal; vi har ingenstans att börja, eftersom utvecklingarna fortsätter åt höger i evighet.

I praktiken klarar vi detta genom att räkna reella tal bara med ett visst antal decimalers noggranhet. Nackdelen med detta är att då gäller inte de vanliga räknereglerna längre. Om vi t.ex. bestämmer oss för att konsekvent räkna enbart med tre decimaler har vi

$$(8000 \cdot 0,031) \cdot 0,001 = 248,000 \cdot 0,001 = 0,248$$

men

$$8000 \cdot (0,031 \cdot 0,001) = 8000 \cdot 0,000 = 0,000.$$

De rationella talen finns ju med bland de reella och det är naturligt att undra vilka decimalutvecklingar som ger rationella tal. En decimalutveckling är avslutad om den slutar med en oändlig sekvens av nollor. Normalt skriver vi förstås inte ut dessa utan skriver t.ex. $2,3245$. Varje reellt tal r med avslutad decimalutveckling är rationellt, eftersom det blir ett heltal efter multiplikation med 10^k, där k är antalet siffror efter decimalkommat. Om t.ex. $r = 2,3245$ är $r = 10^4 r/10^4 = 23245/10000$.

En **decimalutveckling** är **periodisk** om utvecklingen slutar med en oändlig upprepning av en ändlig sekvens av siffror. T.ex. är $2,3455123123123123\ldots$ periodiskt eftersom utvecklingen avslutas med en evig uppräkning av 123. Ett reellt tal r med periodisk decimalutveckling är också rationellt. Efter multiplikation med 10^k, där k är antalet siffor i en period, avslutas utvecklingen av r och $10^k r$ på samma vis, så att skillnaden $10^k r - r = (10^k - 1)r$ har avslutad decimalutveckling och därför är rationellt. Division med $10_k - 1$ ger sedan att r är en kvot mellan två heltal. Om t.ex.$r = 2,3455123123123123\ldots$ så är $10^3 r = 2345,5123123123123\ldots$, så att

$$(10^3 - 1)r = 2345,5123 - 2,3455 = 2343,1668 = 23431668/10000.$$

Å andra sidan ger en decimalutveckling av ett rationellt tal (enligt den divisionsalgoritm vi känner till) alltid antigen ett avslutat eller ett periodiskt decimalbråk. Om vi t.ex. utför divisionsalgoritmen för a/b ska vi successivt utföra divisioner med b på tal som vi efter ett tag får genom att multiplicera rester vid division med 10. Det finns bara ett ändligt antal möjliga rester vid division med b så efter ett tag kommer räkningarna att upprepas och decimalutvecklingen antingen att avslutas (division med b går jämnt ut efter ett tag) eller att upprepas.

Följande räkning illustrerar att decimalutvecklingen av $7/11$:

$$
\begin{array}{r|lll}
\multicolumn{1}{r}{} & 0, & 6 & 3 \\ \cline{2-4}
11 & 7, & 0 & 0 \\ \cline{1-1}
\multicolumn{1}{r}{} & 6 & 6 & \\ \cline{2-3}
\multicolumn{1}{r}{} & & 4 & 0 \\
\multicolumn{1}{r}{} & & 3 & 3 \\ \cline{3-4}
\multicolumn{1}{r}{} & & & 7
\end{array}
$$

Eftersom problemet att dela 7 med 11 redan har dykt upp i räkningarna vet vi nu att de kommer att upprepas och

$$\frac{7}{11} = 0,6363636363\ldots.$$

Avslutningsvis några ord om allmänna bråk. Rationella tal är som sagt de som kan skrivas som kvot mellan två heltal. Det är viktigt att uppfatta t.ex. $2/3$ som ett tal i sig och inte som en uppgift att beräkna.

Man använder också beteckningen x/y för kvoten mellan två reella tal (eller för den delen rationella tal). I sådana fall kallas x/y för ett bråktal. När man uppfattar en kvot mellan två heltal som ett rationellt tal kallas bråket för ett rationellt bråk (eller rationellt tal). De räkneregler som finns i texten ovan för rationella bråk gäller även för allmänna bråk.

ÖVNINGAR

1.1. I texten illustreras räkneregeln $a(b + c) = ab + ac$ för naturliga tal. Hur illustrerar man på liknande sätt att $ab = ba$ och att $(ab)c = a(bc)$?

1.2. Vi har en algoritm för att beräkna produkten av flersiffriga naturliga tal utgående från en multiplikationstabell för ensiffriga sådana tal. Genomför den för $127 \cdot 43$. Varför fungerar den? Vilka räkneregler använder du för att se att algoritmen fungerar?

1.3. Vi har en algoritm för att subtrahera naturliga tal. Genomför den för $431 - 279$. Varför fungerar algoritmen?

1.4. Hur avgör man om två rationella tal är lika? Hur avgör man om det ena är större än det andra?

(a) Vilka av följande rationella tal är lika? Använd inte räknedosan!

$$\frac{84}{315}, \quad \frac{322}{238}, \quad \frac{260}{975}, \quad \frac{456}{1672}, \quad \frac{759}{561}, \quad \frac{153}{561}.$$

(b) Ordna följande rationella tal i storleksordning. Börja med det minsta.

$$\frac{212}{520}, \quad \frac{173}{425}, \quad \frac{131}{321}.$$

1.5. Beräkna

$$\text{(a)}\quad \left(\frac{1}{6}-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{7}+\frac{4}{3}\right) \qquad \text{(b)}\quad \frac{\frac{4}{9}-\frac{3}{5}}{\frac{4}{3}+\frac{7}{5}} \qquad \text{(c)}\quad \frac{35}{9}\left(\frac{6}{7}-\frac{3}{5}\right).$$

Svara på så enkel form som möjligt.(Känner du dig osäker på denna uppgift bör du gå till baka till dina tidigare läroböcker och repetera!)

1.6. Följande misstag i räkningar är inte ovanliga:

$$\frac{a+b}{a+c} = \frac{b}{c}$$
$$\frac{ab}{a+c} = \frac{b}{c}$$

Vilka missuppfattningar ligger bakom dem? För vilka tal a, b och c stämmer de?

1.7. Priset på en vara stiger en vecka med 20% för att veckan efter sjunka med 7%. Hur många procent har varans pris stigit under de två veckorna? Vad händer om priset sjunker 7% under första veckan och sedan stiger 20% under den andra?

1.8.

1.9. Skriv följande tal på decimalform (utan att använda räknedosa).

$$\text{(a)}\quad \frac{7}{9} \qquad \text{(b)}\quad \frac{2}{13} \qquad \text{(c)}\quad \frac{21}{5} \qquad \text{(d)}\quad \frac{23}{11}.$$

1.10. Skriv följande tal som rationella bråk.

(a) 0,237
(b) $0,237373737\ldots$ (periodiskt)
(c) $34,1243243\ldots$ (periodiskt)

1.11. Avgör om det givna rationella talet är större eller mindre än $\sqrt{3}$. (En räknedosa kan vara till hjälp, men använd den bara för att multiplicera heltal!)

(a) $\frac{313}{179}$ (b) $\frac{151}{87}$ (c) $\frac{71}{41}$

1.12. Bestäm de tre första decimalerna i decimalutveckligen av $\sqrt{3}$. (Räknedosa kan var till hjälp, men använd metoden i texten för att skriva ett tal vars kvadrat är 3. Knappa inte in $\sqrt{3}$ direkt!)

1.13. Ange en decimalutveckling av ett reellt tal som garanterat inte är rationellt.

1.14. Finns det alltid ett rationellt tal mellan två olika reella tal? Varför?

1.15. I texten hävdas det att det mellan två olika rationella tal alltid finns oändligt många andra rationella tal. Varför stämmer det? Stämmer det också att det mellan två olika reella tal finns oändligt många olika rationella tal?

Några frågor att fundera vidare kring

1. Vilket (om något) är problemet med att subtraktion och division mellan naturliga tal inte alltid är möjlig? Vilket av problemen är mest konkret? I vilken ordning tas de upp (och löses) i skolan?
2. Hur förklaras räkneregler i skolundervisningen? Hur tas problemet med multiplikation av två negativa tal upp?
3. I vilka sammanhang används de olika typerna av tal? Hur använder du själv dem? Hur hanterar du själv negativa tal och bråk i det dagliga livet?
4. Är det bättre eller sämre att skriva om rationella tal i decimalform? När kan det vara bra att göra det? När är det inte bra?

Förslag till svar

1.4 a) $\frac{84}{315} = \frac{260}{975}, \frac{456}{1672} = \frac{153}{561}$ och $\frac{322}{238} = \frac{759}{561}$. b) $\frac{173}{425} < \frac{212}{520} < \frac{131}{321}$

1.5 a) $-\frac{136}{63}$ b) $-\frac{7}{123}$ c) 1.

1.6 När $a = 0$ eller $b = c$ respektive när $b = 0$ eller $c = a/(a-1)$.

1.7 Ökat 11,6%. Samma resultat.

1.9 a) $0,\underline{7}7\ldots$ (periodiskt) b) $0,\underline{153846}153846\ldots$ (periodiskt) c) 4,2 d) $2,\underline{09}09$ (periodiskt).

1.10 a) $\frac{237}{1000}$ b) $\frac{47}{198}$ c) $\frac{6313}{185}$

1.11 a) $> \sqrt{3}$ b) $> \sqrt{3}$ c) $< \sqrt{3}$.

1.13 T.ex. $0,1010010001\ldots$.

1.14 Ja. Använd decimalutvecklingen

1.15 Ja.

Omstuvat utdrag ur

R Pettersson: Förberedande kurs i matematik

1 Addition, subtraktion och multiplikation av (reella) tal

För reella tal gäller som bekant bl.a. följande räkneregler:

$$\begin{array}{llll}(a+b)+c=a+(b+c) & \text{(associativitet)} & (ab)c=a(bc) & \text{(associativitet)}\\ a+b=b+a & \text{(kommutativitet)} & ab=ba & \text{(kommutativitet)}\\ 0+a=a & \text{(identitet)} & 1\cdot a=a & \text{(identitet)}\end{array}$$

$$a(b+c)=(ab)+(ac)=ab+ac \text{ (distributivitet), varav } (a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

$ab=0$ precis när något av a eller b är 0.

För räkning med tecken har man också att:

$$\begin{array}{lll}(-1)\cdot a=-a & (-a)\cdot b=a\cdot(-b)=-ab & (-a)(-b)=ab\\ -(a+b)=-a-b & -(a-b)=-a+b=b-a. & \end{array}$$

Potenser med naturligt tal n i exponenten definieras enligt:

$$a^0=1 \text{ (för } a\neq 0) \qquad a^1=a \qquad a^2=a\cdot a$$

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n \text{ stycken}}$$

Definitionen och $ab=ba$ ger *potenslagarna*:

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n} \qquad (a^n)^m=a^{n\cdot m} \qquad (ab)^n=a^n\cdot b^n.$$

Eftersom $(-1)^2=1$, gäller att $(-a)^1=-a$, $(-a)^2=a^2$, $(-a)^3=-a^3$ och allmänt

$$(-a)^n=\begin{cases}a^n & \text{om } n \text{ är jämnt}\\ -a^n & \text{om } n \text{ är udda.}\end{cases}$$

Exempel: Med räknereglerna ovan kan man förenkla en del algebraiska uttryck:

a) $10m-9y+5y+7m+4y-m=(10+7-1)m+(-9+5+4)y=16m+0\cdot y=16m$

b) $m-[a-b-(c-m)]=m-[a-b-c+m]=m-a+b+c-m=b+c-a$

c) $3abc\cdot a^3bc^2\cdot(-4b^2)=3\cdot(-4)\cdot a\cdot a^3\cdot b\cdot b\cdot b^2\cdot c\cdot c^2=-12a^4b^4c^3$

d) $(3x^2y^3z)^4=3^4\cdot(x^2)^4\cdot(y^3)^4\cdot z^4=81\cdot x^8\cdot y^{12}\cdot z^4$

e) $(2x+3)(4x^2-6x+9)=2x\cdot 4x^2+2x\cdot(-6x)+2x\cdot 9+3\cdot 4x^2+3\cdot(-6x)+3\cdot 9=$
$=8x^3-12x^2+18x+12x^2-18x+27=8x^3+27$

Ö1. Förenkla

(a) $10t-14u+7v-t-8v+14u-8v-u$

(b) $70a+20c+33x+c-x-28a-40a-9c+41x$

Ö2. Förenkla

(a) $m + 2p - (m + p - r)$ (b) $3c - (2a + c - 5b) - (2b - 2a)$

(c) $7a - 2b - [(3a - c) - (2b - 3c)]$

Ö3. Beräkna

(a) 5^2 (b) 2^5 (c) $(-3)^4$ (d) $(-4)^3$ (e) 1^{100}
(f) 100^1 (g) 3^0 (h) $(-3)^0$

Ö4. Förenkla

(a) $2xz^7 \cdot 10xz$ (b) $a^2b^4c \cdot (-3ac^2) \cdot 9abc$ (c) $-2p^2qr \cdot pq^7s^2 \cdot (-7qr^3)$

Ö5. Förenkla

(a) $(3x^2y)^3$ (b) $(4ab^2c^3)^2 \cdot (-2a^2b)^3$ (c) $(a^2)^p \cdot (a^pb^{3p})^2 \cdot b^p$

Ö6. Omforma (genom att multiplicera ihop parenteserna)

(a) $(2x - y)(x + 2y)$ (b) $(2x - y)(x + 2y)(x - y)$

(c) $(a + x)(a^4 - a^3x + a^2x^2 - ax^3 + x^4)$ (d) $(x^2 - 2x + 3)(2 - 3x - 2x^2)$

Följande viktiga formler bör man kunna utantill:

kvadreringsreglerna:
$$\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (b-a)^2 \end{cases}$$

kuberingsreglerna:
$$\begin{cases} (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{cases}$$

konjugatregeln:
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = (a-b)(a+b)$$

faktoruppdelningarna:
$$\begin{cases} a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \end{cases}$$

Att skriva om ett uttryck som en produkt av andra uttryck kallas att *faktorisera* det ursprungliga uttrycket, eller att *dela upp det i faktorer* . Samtliga formler ovan handlar (åt ena hållet) om faktorisering.

Uttrycket $a^2 + b^2$ (liksom $a^2 + ab + b^2$ och $a^2 - ab + b^2$) kan **inte** faktoriseras (med reella tal).

I matematik skiljer man på å ena sidan *formler* (eller *identiteter* eller *likheter*) och å andra sidan *ekvationer*. Båda innehåller ett vänster- och ett högerled skilda åt av ett likhetstecken. När det är frågan om en ekvation är vänstra och högra leden inte lika för alla värden på de ingående bokstäverna (variablerna). Det är en uppgift att ta reda på för vilka värden på variablerna leden blir lika. I en formel är däremot de båda leden lika för alla värden på de ingående variablerna. Vid *omskrivningar* av uttryck är det identiteter som används.

En generalisering av formeln för $a^3 - b^3$ är **allmänna konjugatregeln**:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \cdots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1}).$$

Man ser att detta stämmer genom att multiplicera ihop parenteserna i högra ledet.

Exempel:

a) $(3a+4b)^2 =$ (kvadreringsregeln) $= (3a^2) + 2 \cdot 3a \cdot 4b + (4b)^2 = 9a^2 + 24ab + 16b^2$

b) $(3+x^2)(x^2-3) = (x^2+3)(x^2-3) =$ (konjugatregeln) $= (x^2)^2 - 3^2 = x^4 - 9$

c) $(x-2y)^3 =$ (kuberingsregeln) $= x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2y + 3 \cdot x \cdot (2y)^2 - (2y)^3 =$
$= x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$

d) Faktoruppdelning: $4x^2 - 9a^4 = (2x)^2 - (3a^2)^2 =$ (konjugatregeln) $=$
$= (2x+3a^2)(2x-3a^2)$

e) Faktoruppdelning: $12x^4 - 2x^5 - 18x^3 =$ (alla gemensamma faktorer brytes ut) $=$
$= 2x^3 \cdot (6x - x^2 - 9) = -2x^3(x^2 - 6x + 9) = -2x^3 \cdot (x-3)^2$

f) Faktoruppdelning: $x^4 + 8xy^6 = x \cdot (x^3 + 8y^6) = x \cdot [x^3 + (2y^2)^3] =$
$=$ (enligt formeln för $a^3 + b^3$) $= x \cdot (x+2y^2)[x^2 - x \cdot 2y^2 + (2y^2)^2] =$
$= x \cdot (x+2y^2)(x^2 - 2xy^2 + 4y^4)$

Ö7. Utveckla

(a) $(3a-4b)^2$ (b) $(a^3+2b^2)^2$ (c) $(m^4+4)^2 + (m^4-4)^2$

Ö8. Förenkla

(a) $(6-x)(x+6)$ (b) $(a^2+y)(a^2-y)$ (c) $(x^3+3)(x^3-3)(x^6+9)$

Ö9. Utveckla

(a) $(y+3x)^3$ (b) $(3x+2y^2)^3$ (c) $(x^4-6x)^3$

Ö10. Uppdela i faktorer

(a) $x^2 - a^4$ (b) $9x^4 - 25x^2$ (c) $18x + 81 + x^2$

(d) $x^4y + 4x^2y^3 - 4x^3y^2$ (e) $x^4 - x$ (f) $3a^3 + 81b^3$

(g) $x^2 - x^6$ (h) $54x^2y^7 - 16x^5y$

Koefficienterna i *utvecklingen av* $(a+b)^n$ kan bestämmas med hjälp av **Pascals triangel**:

$$
\begin{array}{r|ccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \text{o.s.v.}
\end{array}
$$

Ett tal i triangeln fås genom addition av de två tal, som står närmast snett ovanför.
Detta studeras i en kurs om kombinatorik.

Exempel:

a) $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

b) $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

c) $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

Ö14. Utveckla

(a) $(x-1)^5$ (b) $(1-y)^7$ (c) $(2x+a^2)^5$ (d) $(xy^2-3z)^6$

2 Bråkräkning

Med bråket $x = a/b = a : b$ menas det (reella) tal, som satisfierar ekvationen $b \cdot x = a$, om $b \neq 0$. För bråkräkning gäller bl.a. följande regler:

(förkortning och förlängning) $\dfrac{c \cdot a}{c \cdot b} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot c}$ (när $c \neq 0$)

(multiplikation) $a \cdot \dfrac{b}{c} = \dfrac{ab}{c}, \quad \dfrac{a}{b} \cdot c = \dfrac{ac}{b}, \quad \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd},$

(division; dubbelbråk) $\dfrac{a/b}{c/d} = \dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c}$

(addition och subtraktion) $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a+b}{c}, \quad \dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{c} = \dfrac{a-b}{c}$

Från detta följer

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

OBS:

$\dfrac{1}{a+b}$ är **inte** alltid lika med $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$. Inte heller är $\dfrac{a+c}{b+c}$ i allmänhet $\dfrac{a}{b}$.
Det är ett vanligt fel att tro motsatsen.

Om t.ex. $a = b = 1$, så är nämligen $\dfrac{1}{a+b} = \dfrac{1}{2}$ medan $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 2$.

Potenser med *negativa heltal* som exponenter definieras:

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad a^{-2} = \frac{1}{a^2}, \quad \ldots, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad \text{varav följer}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

Exempel:

a) $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{(-a)\cdot(-1)}{b\cdot(-1)} = \dfrac{a}{-b}$, varav följer att $-\dfrac{a-b}{c} = \dfrac{-(a-b)}{c} = \dfrac{-a+b}{c} = \dfrac{b-a}{c}$
och $-\dfrac{a}{b-c} = \dfrac{a}{-(b-c)} = \dfrac{a}{c-b}$

b) $\dfrac{30x^4y^7}{12xy^{10}} = \dfrac{2\cdot3\cdot5\cdot x^{4-1}}{2\cdot2\cdot3\cdot y^{10-7}} = \dfrac{5x^3}{2y^3} = 2,5\cdot x^3\cdot y^{-3}$

c) (förenkla) $\dfrac{x-y}{xy-x^2} = \dfrac{x-y}{x(y-x)} = -\dfrac{y-x}{x(y-x)} = -\dfrac{1}{x}$

d) (förenkla) $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2\right):\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{b}{a^2}\right) = \dfrac{(a^2+b^2+2ab)}{ab} : \dfrac{(a^2-b^2)}{a^2b} =$
$= \dfrac{(a^2+b^2+2ab)\cdot a^2b}{ab\cdot(a^2-b^2)} = \dfrac{(a+b)^2\cdot a}{(a+b)(a-b)} = \dfrac{(a+b)a}{a-b}$

e) (förenkla) $\dfrac{5}{2x-2} - \dfrac{1}{3x} + \dfrac{3x+1}{1-x^2} =$ (faktoruppdela nämnarna) $=$
$= \dfrac{5}{2(x-1)} - \dfrac{1}{3x} - \dfrac{3x+1}{(x+1)(x-1)} =$ (minsta gemensamma nämnare är
$2\cdot3\cdot x\cdot(x+1)(x-1)) = \dfrac{5\cdot3x(x+1)}{2(x-1)\cdot3x(x+1)} - \dfrac{1\cdot2(x+1)(x-1)}{3x\cdot2(x+1)(x-1)} - \dfrac{(3x+1)\cdot2\cdot3x}{(x+1)(x-1)\cdot2\cdot3x} =$
$= \dfrac{(15x^2+15x)-(2x^2-2)-(18x^2+6x)}{2\cdot3\cdot x(x+1)(x-1)} = \dfrac{-5x^2+9x+2}{6x(x^2-1)} = -\dfrac{5x^2-9x-2}{6(x^3-x)}$

Ö15. Beräkna

(a) $\dfrac{1}{4} - \left(1\dfrac{1}{3} - 2\dfrac{1}{6}\right)$ (b) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right):\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{3}\right)$

Ö16. Beräkna

(a) 2^{-2} (b) $(-3)^{-3}$ (c) 1^{-5}

Ö17. Skriv som potenser av 2

(a) $1/64$ (b) $16^3/2^{10}$ (c) $128^3/32^5$

Ö18. Förenkla

(a) $\dfrac{6a^7b^3c}{16ab^3c^3}$ (b) $\dfrac{32x^ny^p}{36x^{n+1}y^{p-1}}$ (c) $\dfrac{2ay+y^2}{2ay}$

(d) $\dfrac{12x^2y^2+20xy^2-8x^2y}{4xy}$

Ö19. Förenkla

(a) $(2a+2b)/(b^2-a^2)$ (b) $(x^2-4x^4)/(4x^2-4x+1)$

(c) $(x-y)^3/(y-x)^5$ (d) $(b^8-9)/(b^8-6b^4+9)$ (e) $(a^3-b^3)/(b-a)^2$

(f) $(a^3+1)/(a-a^2+a^3)$ (g) $(x^4-16)/((x+2)(x^3-8))$

Ö20. Förkorta (om möjligt)

(a) $(a^3+b^3)/(a+b)$ (b) $(a^4-b^4)/(a-b)$

(c) $(a^4+b^4)/(a+b)$ (d) $(a^5-b^5)/(b-a)$

Ö21. Förenkla

(a) $\left(\frac{x}{y^2}-\frac{y^2}{x}\right):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y^2}\right)$ (b) $\left(1-\frac{1}{x^4}\right)/\left(1+\frac{1}{x^3}\right)$

(c) $\left[\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right]:\left[\frac{x+y}{x-y}-2+\frac{x-y}{x+y}\right]$

(d) $\left[\frac{1/a}{b}-\frac{1/b}{a}+\frac{1}{2b/a}+\frac{2}{a/b}\right]:\left[\frac{a^2+4b^2}{ab}\right]$

Ö22. Skriv som ett bråk (på så enkel form som möjligt)

(a) $\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+3}-\frac{2}{x}$ (b) $1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{x^2-4x}$ (c) $\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{1-x^2}$

(d) $\frac{1}{x^3-8}+\frac{1}{2x^2-8}+\frac{1}{8-4x}$

3 Absolutbelopp

Definition:

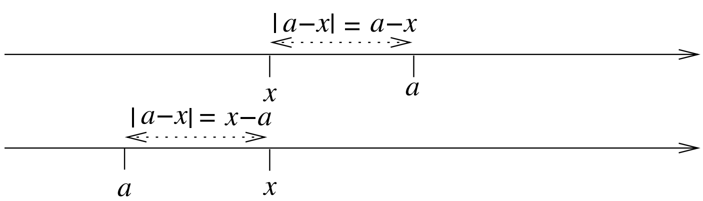
$$|x| = \begin{cases} x & \text{om} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{om} \quad x < 0 \end{cases}$$

OBS: $|x| \geq 0$ för alla x.

Av definitionen följer att

$$|x-a| = \begin{cases} x-a & \text{när} \quad (x-a) \geq 0, \quad \text{d.v.s. när} \quad x \geq a \\ -(x-a) = a-x & \text{när} \quad (x-a) < 0, \quad \text{d.v.s. när} \quad x < a \end{cases}$$

Geometriskt kan $|x-a|$ uppfattas som (avståndet) mellan punkterna x och a på tallinjen:



OBS:

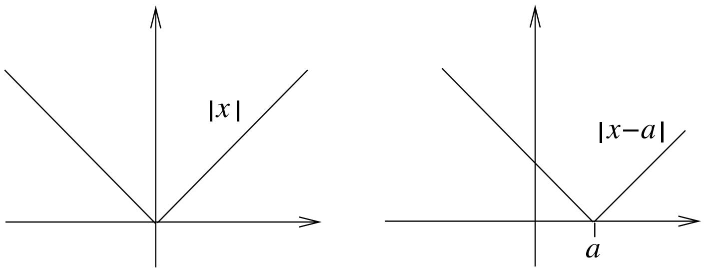
$$|x-a| = |a-x|$$

och

$$|x-a| = b \quad \text{precis när} \quad x-a = \pm b$$

Olikheten $|x-a| \leq b$ kan skrivas utan beloppstecken: $-b \leq x-a \leq b$, d.v.s. $a-b \leq x \leq a+b$, (om $b \geq 0$).

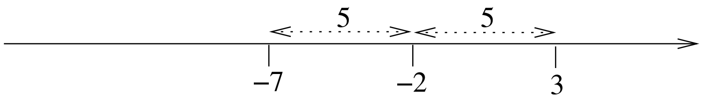
Graferna till $y = |x|$ resp. $y = |x - a|$ är:



Exempel:

a) Enligt definitionen är $|-3| = -(-3) = +3$, ty $x = -3 < 0$.

b) Ekvationen $|x + 2| = 5$ kan skrivas $|x - (-2)| = 5$. Med avståndsbetraktelse fås att lösningarna till ekvationen är ($x_1 = 3$ och $x_2 = -7$).



c) Olikheten $|x + 1| < 3$ kan skrivas $-3 < x + 1 < 3$, d.v.s. $-4 < x < 2$.

Exempel: Lös ekvationen $|x - 3| + |2x + 1| = 5$.

Lösning: Vi har $|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{när} \quad x \geq 3 \\ -(x - 3) & \text{när} \quad x < 3 \end{cases}$

och $|2x + 1| = \begin{cases} 2x + 1 & \text{när} \quad 2x + 1 \geq 0, \quad \text{d.v.s.} \ x \geq -1/2 \\ -(2x + 1) & \text{när} \quad x < -1/2 \end{cases}$

Vi måste alltså studera 3 olika fall:

Fall 1: När $x \geq 3$ fås ekvationen $(x - 3) + (2x + 1) = 5$, d.v.s. $3x = 7$, som ger $x = 7/3$. Men $7/3 < 3$, d.v.s. $7/3$ ligger *inte* i det rätta intervallet, så $x = 7/3$ är *inte* en lösning till den givna ekvationen.

Fall 2: När $-1/2 \leq x$ 3 fås ekvationen $-(x - 3) + (2x + 1) = 5$, som ger $x = 1$. $x_1 = 1$ ligger i intervallet $-1/2 \leq x < 3$ och är alltså en lösning. (Pröva genom insättning i den givna ekvationen!)

Fall 3: När $x < -1/2$ fås $-(x - 3) - (2x + 1) = 5$, som ger $x = -1$. Eftersom $x_2 = -1$ ligger i rätt intervall är det en lösning.

Svar: Ekvationen $|x - 3| + |2x + 1| = 5$ har lösningarna $x_1 = 1$ och $x_2 = -1$.

Tillägg (till exemplet ovan): Om vi vill rita grafen till
$y = |x-3| + |2x+1|$, så skriver vi

$$y = \begin{cases} (x-3)+(2x+1) = 3x-2 & \text{när} \quad x \geq 3 \\ -(x-3)+(2x+1) = x+4 & \text{när} \quad -1/2 \leq x < 3 \\ -(x-3)-(2x+1) = -3x+2 & \text{när} \quad x < -1/2 \end{cases}$$

Man ser av grafen för $y = |x-3| + |2x+1|$, att t.ex. ekvationen $|x-3| + |2x+1| = 2$ *saknar lösning.*

Ö27. Bestäm

(a) $|7|$ (b) $|-7|$ (c) $|0|$

Ö28. Lös ekvationerna

(a) $|x+1| = 1$ (b) $|3-x| = 7,5$ (c) $|x+4| = 0$

(d) $|3-2x| = 5$ (e) $|x-2| = -2$

Ö29. Bestäm (utan beloppstecken) de x, som satisfierar

(a) $|x-1| \leq 2$ (b) $|x+3| < 5$

(c) $2 < |x-2| \leq 3$ (d) $|x+2| \leq 0$

Ö30. Lös ekvationerna

(a) $|x-2| + |x+1| = 4$ (b) $|x-2| + |x+1| = 3$

(c) $|x-5| + 3|x+5| = 20$ (d) $|x-5| + 3|x+5| = 10$

4 Kvadratrötter

Vi observera först att

$$x^2 = x \cdot x \geq 0 \text{ för alla (reella) tal } x$$

för, om t.ex. $x = -t < 0$, så är $x^2 = (-t)^2 = (-1)^2 \cdot t^2 = +t^2 > 0$, ty $t = -x > 0$. Alltså har ekvationen $x^2 = b$ (reella) lösningar bara om $b \geq 0$.

Definition:

Med $\sqrt{b}$, där $b \geq 0$, menas det icke-negativa, reella tal, vars kvadrat är b, d.v.s.

$(\sqrt{b})^2 = b$, om $b \geq 0$.

OBS: $\sqrt{b} > 0$ när $b > 0$.

Anmärkning. Tal som är > 0 kallas *positiva* medan de som är < 0 kallas *negativa*. Talet 0 är alltså varken positivt eller negativt. De tal som är ≥ 0 är alltså de tal som inte är negativa och de kallas därför för icke-negativa. Tal som är ≤ 0 är de tal som inte är positiva och de kallas därför för icke-positiva. I ärlighetens namn ska medges att inte minst professionella matematiker struntar i distinktionen mellan positivt tal och icke-negativt tal; med "positivt tal" avses ofta "icke-negativt" tal.

Exempelvis är $\sqrt{9} = 3$.

När $b > 0$ har ekvationen $x^2 = b$ (två) olika reella lösningar (rötter):

$x_1 = \sqrt{b}$ och $x_2 = -\sqrt{b}$

för $x_1^2 = (\sqrt{b})^2 = b$ (enligt definition), men också $x_2^2 = (-\sqrt{b})^2 = (-1)^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{b})^2 = b$. Man skriver

$$x^2 = b \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{b} \quad (\text{när } b \geq 0).$$

(När $b = 0$ är $x_1 = x_2 = 0$ en *dubbel*rot.)

Exempelvis har ekvationen $x^2 = 9$ lösningarna $x_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$, d.v.s. $x_1 = 3$ och $x_2 = -3$. Från definitionen av $\sqrt{b}$ följer bl.a. följande räkneregler:

1) $\sqrt{a^2} = |a|$ för alla reella a, d.v.s. $\sqrt{a^2} = a$ om $a \geq 0$ och $\sqrt{a^2} = -a$ om $a < 0$,
2) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ och $\sqrt{a}/\sqrt{b} = \sqrt{a/b}$, för a och $b > 0$.

En viktig tillämpning av reglerna 1 och 2 är

3) $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a| \cdot \sqrt{b}$ för $b \geq 0$, alla a

Ett bråk med rotuttryck i nämnaren kan omformas med reglerna 4 eller 5:

4) $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$, för $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$,

5) $\dfrac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$ och $\dfrac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$.

Reglerna 5) kallas förlängning med konjugerat uttryck; $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ är det konjugerade uttrycket till $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ och vice versa. Man bör inte lära sig 4) och 5) utantill, men man ska veta att en lämplig förlängning kan få bort ett rotuttryck ur nämnaren. T.ex. är första delen av 5)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} &= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \\ &= (\text{konjugatregeln}) = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} \end{aligned}$$

när $a \neq b$, a och $b > 0$.

OBS: I allmänhet är $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$, (alltför vanligt fel att tro motsatsen). Om t.ex. $a=b=1$ ger $\sqrt{a+b}=\sqrt{2}$ medan $\sqrt{a}+\sqrt{b}=2$. På samma sätt är i allmänhet $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a}-\sqrt{b}$.

Exempel:

a) Ekvationen $4x^2-3=0$, d.v.s. $x^2=3/4$ har lösningarna $x_{1,2}=\pm\sqrt{3/4}=\pm\sqrt{3}/2$

b) (skriv med heltalsnämnare): $\dfrac{1}{5+\sqrt{6}}=$ [multiplicera med konjugatuttrycket] $=$

$$= \frac{5-\sqrt{6}}{(5+\sqrt{6})(5-\sqrt{6})} = \frac{5-\sqrt{6}}{5^2-(\sqrt{6})^2} = \frac{5-\sqrt{6}}{25-6} = \frac{5-\sqrt{6}}{19}$$

Exempel:

a) $\sqrt{(-3)^2}=|-3|=3$

b) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}=|2+\sqrt{3}|=2+\sqrt{3}$

c) För $a>0, b>0$ är $a\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a^2\cdot b}$

d) För $a<0, b>0$ är $a\cdot\sqrt{b}=-(-a)\sqrt{b}=-\sqrt{(-a)^2\cdot b}=-\sqrt{a^2\cdot b}$

e) För $a>0, b>0$ är $a\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{a^2\cdot\frac{b}{a}}=\sqrt{ab}$

f) För $a<0, b<0$ är $a\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}=-(-a)\sqrt{\frac{b}{a}}=-\sqrt{(-a)^2\cdot\frac{b}{a}}=-\sqrt{a^2\cdot\frac{b}{a}}=-\sqrt{ab}$

g) (förenkla): $\dfrac{3-x}{\sqrt{x-3}}=-\dfrac{x-3}{\sqrt{x-3}}=-\sqrt{\dfrac{(x-3)^2}{x-3}}=-\sqrt{x-3}$ för $x>3$.

OBS: $\sqrt{x-3}$ är definierat för $x-3\geq 0$, d.v.s. $x\geq 3$, men $1/\sqrt{x-3}$ endast för $x>3$].

h) $$\frac{x}{\sqrt{x^2+x^3}}=\frac{x}{\sqrt{x^2(1+x)}}=\frac{x}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+x}}=\frac{x}{|x|\sqrt{1+x}}=\begin{cases}1/\sqrt{1+x} & \text{för } x>0\\ -1/\sqrt{1+x} & \text{för } -1<x<0.\end{cases}$$

OBS: Var uppmärksam på tecknet vid inmultiplicering i och utbrytning ur rotuttryck!!!

Ö31. Förenkla

(a) $\sqrt{0,49}$ (b) $\sqrt{90000}$ (c) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{75}$ (d) $\sqrt{10}/\sqrt{125}$

(e) $\sqrt{12}-\sqrt{3}$ (f) $\sqrt{2}-\sqrt{4}+\sqrt{8}+\sqrt{16}-\sqrt{32}+\sqrt{64}$ (g) $\sqrt{21+\sqrt{5}}$

(h) $\sqrt{16-6\sqrt{7}}$

Ö32. Lös ekvationen

(a) $x^2-25=0$ (b) $5-x^2=0$ (c) $9x^2-4=0$ (d) $16-6x^2=0$
(e) $x^2=0$

Ö33. Skriv med heltalsnämnare

(a) $2/\sqrt{6}$ (b) $3/\sqrt{21}$ (c) $1/(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ (d) $2/(\sqrt{11}-3)$

(e) $1/(2-\sqrt{5})$ (f) $(\sqrt{6}-\sqrt{3})/(\sqrt{6}+\sqrt{3})$

Ö34. Förenkla (och ange definitionsmängd): (a) $\sqrt{x^2+4x+4}$ (b) $x/\sqrt{x^2}$ (c) $(\sqrt{x})^2/x$

(d) $(x^2-9x)/\sqrt{9-x}$ (e) $x/\sqrt{x^3-2x^2}$ (f) $\sqrt{x^3+2x^2}/x$

5 Definition av komplexa tal

Ekvationen $x^2 = b$ saknar *reella* lösningar, om $b < 0$. Däremot har den *imaginära* (d.v.s. icke-reella) lösningar. Sätt $b = -c$:

> Ekvationen $x^2 = -c$ har för $c > 0$ två olika *rent imaginära lösningar* $x_1 = i\sqrt{c}$ och $x_2 = -i\sqrt{c}$, där $i^2 = -1$, d.v.s
>
> $x^2 = -c$ precis när $x_{1,\,2} = \pm i\sqrt{c}$, om $c > 0$.

Man kan också (något oegentligt) skriva: $x^2 = -c$ precis när $x_{1,\,2} = \pm\sqrt{-c} = \pm i\sqrt{c}$, om $c > 0$.

Exempel: $x^2 + 12 = 0$, d.v.s $x^2 = -12$ ger $x_{1,2} = \pm\sqrt{-12} = \pm i\sqrt{12} = \pm i \cdot 2\sqrt{3}$

Ö35. Lös ekvationerna

(a) $x^2 = -4$ (b) $3 + 25x^2 = 0$ (c) $9 + 12x^2 = 0$ (d) $9 - 12x^2 = 0$

(e) $(x-2)^2 = -9$ (f) $(x+1)^2 + 4 = 0$ (g) $x^4 = 16$ (sätt $x^2 = z$)

> Ett **komplext tal** kan skrivas på formen $u + i \cdot v$, där u och v är *reella* tal och i är den *imaginära enheten*, som satisfierar ekvationen: $i^2 = -1$.

Talet $u + i{\cdot}$v är *reellt* om $v = 0$, *imaginärt* om $v \neq 0$ och *rent imaginärt* om $u = 0, v \neq 0$. Räknereglerna för reella tal gäller också för komplexa tal, (med tillägget: $i^2 = -1$).

Exempel: $\dfrac{1}{3+4i} = \dfrac{3-4i}{(3+4i)(3-4i)} = [\text{konjugatregeln}] = \dfrac{3-4i}{3^2-(4i)^2} =$
$= \dfrac{3-4i}{9-16i^2} = \dfrac{3-4i}{9+16} = \dfrac{3-4i}{25} = \dfrac{3}{25} - i \cdot \dfrac{4}{25}$

Ö36. Skriv på formen $u + iv$

(a) $(3+i) - (1-4i)$ (b) $(3+i)(1-4i)$

(c) $(3-4i)^2$ (d) $1/(1+i)$ (e) $1/(1-4i)$ (f) $(3+i)/(1-4i)$

(g) $1/(3+i) + 1/(1-4i)$

6 Polynom och rationella uttryck

> Med **polynom** (i x) menas uttryck av formen
>
> $$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
>
> där $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ och a_0 kallas *koefficienter* för $x^n, x^{n-1}, \ldots, x$ resp. $x^0 (= 1)$.
> Om $a_n \neq 0$ så säges $p(x)$ vara av *graden* n.

Exempel: Kvadratkomplettering (i andragradspolynom)

$x^2 - 6x + 11 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 11 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 11 =$ (kvadreringsregeln) $=$
$= (x-3)^2 - 9 + 11 = (x-3)^2 + 2$. (Om man sätter $x - 3 = t$, så fås ett uttryck $t^2 + 2$ utan t-term, dvs utan förstagradsterm).

Exempel: Bestäm största värdet av $f(x) = 12x - 2x^2 - 22$.

Lösning: $f(x) = 12x - 2x^2 - 22 =$ (bryt ut koefficienten för x^2) $= -2(x^2 - 6x + 11) =$
$=$ (kvadratkomplettera) $= -2[(x-3)^2 + 2] = -2(x-3)^2 - 4$. Eftersom $(x-3)^2 \geq 0$ för alla reella x, så antar $f(x) = -2(x-3)^2 - 4$ sitt *största värde* -4 *när* $x = 3$.

Ö11. Kvadratkomplettera

(a) $x^2 + 4x + 1$ (b) $4x^2 - 36x + 100$ (c) $3 - 12x - x^2$

Ö12. Bestäm minsta värdet av

(a) $x^2 + 2x$ (b) $3x^2 - 2x + 1$ (c) $x^4 - 8x^2 + 1$

(d) $x^4 + 8x^2 + 1$

Ö13. Bestäm största värdet av

(a) $7 - x^2 + 4x$ (b) $x + 1 - 5x^2$

Ett **rationellt tal** är ett tal som kan skrivas på formen $\dfrac{p}{q}$, där p och q är heltal och $q \neq 0$.
Ett **rationellt uttryck** ($i\,x$) är ett uttryck som kan skrivas på formen $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, där $p(x)$ och $q(x)$ är polynom och $q(x) \not\equiv 0$, d.v.s. $q(x)$ ej är identiskt noll.

Om gradtalet för $p(x)$ är större än eller lika med gradtalet för $q(x)$, kan $p(x)$ divideras med $q(x)$, så att

$\dfrac{p(x)}{q(x)} = k(x) + \dfrac{r(x)}{q(x)}$ (d.v.s. $p(x) = k(x)q(x) + r(x)$), där $r(x)$ har lägre grad än $q(x)$ (eller är $\equiv 0$) .
$k(x)$ kallas kvot(polynom) och $r(x)$ rest(polynom).

Exempel: Dividera $\dfrac{2x^3 - 3x^2 + 8x + 1}{x^2 - 2x + 3}$ så långt som möjligt.

Lösning:

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x + 1 (= k(x)) \\
(q(x) =) \underline{x^2 - 2x + 3} | & \overline{2x^3 - 3x^2 + 8x + 1} (= p(x)) \\
 & \underline{-(2x^3 - 4x^2 + 6x)} \\
 & x^2 + 2x + 1 \\
 & \underline{-(x^2 - 2x + 3)} \\
 & 4x - 2 (= r(x))
\end{array}
$$

vilket ger

$$\frac{2x^3-3x^2+8x+1}{x^2-2x+3} = 2x+1+\frac{4x-2}{x^2-2x+3}$$

Ö24. Utför följande divisioner:

(a) $\dfrac{x^4}{x^2-1}$ (b) $\dfrac{x^4+x}{x^4-1}$ (c) $\dfrac{2x^3+8x^2-7x+4}{x^2+5x-3}$

(d) $\dfrac{x^4+x^3-7x^2-x+6}{x^2+4x+3}$ (e) $\dfrac{2x^3-3x^2+8x+1}{2x+1}$ (f) $\dfrac{3x^4-x^3-x^2-x}{3x^2-x-2}$

7 Ekvationer av grad två

En ekvation av grad två $ax^2+bx+c=0$ kan, då $a \neq 0$, skrivas på *normalform*: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$. En andragradsekvation på normalform, $x^2+px+q=0$, kan lösas genom **kvadratkomplettering**:

$$x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=0, \quad \text{d.v.s.} \quad \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q,$$

varför $x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$.

Andragradsekvationen $x^2+px+q=0$ har lösningarna

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Dessa lösningar x_1 och x_2 är

1) reella och olika, om $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q>0$,

2) reella och lika, om $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=0$,

3) imaginära och olika, om $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q<0$.

OBS: Ekvationen $x^2+px=0$, för $q=0$, har lösningen $x_1=0$ (och $x_2=-p$).

Exempel:

a) Ekvationen $x^2+6x+5=0$ har lösningarna $x_{1,2}=-3\pm\sqrt{(-3)^2-5}=-3\pm\sqrt{9-5}=-3\pm\sqrt{4}=-3\pm 2$ d.v.s. $x_1=-3+2=-1$ och $x_2=-3-2=-5$

b) Ekvationen $6+3x-4x^2=0$ kan skrivas $x^2-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}=0$, som har lösningarna $x_{1,2}=\frac{3}{8}\pm\sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2+\frac{3}{2}}=\frac{3}{8}\pm\sqrt{\frac{9}{64}+\frac{3}{2}}=\frac{3}{8}\pm\sqrt{\frac{9+96}{64}}=\frac{3}{8}\pm\frac{1}{8}\cdot\sqrt{105}$, d.v.s $x_1=(3+\sqrt{105})/8$ och $x_2=(3-\sqrt{105})/8$.

c) Ekvationen $x^2+6=4x$ kan skrivas $x^2-4x+6=0$ med lösning $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-6}=2\pm\sqrt{-2}=2\pm i\cdot\sqrt{2}$ d.v.s. $x_1=2+i\cdot\sqrt{2}$ och $x_2=2-i\cdot\sqrt{2}$

Ö37. Lös ekvationerna

(a) $x^2 + 3x - 4 = 0$ (b) $3 + 2x - x^2 = 0$ (c) $2x^2 = 3 + x$

(d) $3x + 7x^2 = 0$ (e) $4x^2 + 9 = 12x$ (f) $5x^2 + 3x = 1$

Ö38. Lös ekvationerna

(a) $x^2 + 2x + 2 = 0$ (b) $5x^2 + 3x + 1 = 0$ (c) $3x^2 + 1 = 3x$

Ö39. Lös ekvationerna

(a) $x + 3 = 4 \cdot x^{-1}$, (multiplicera med x)

(b) $x + 9x^{-1} = 12$ (c) $3 + x^{-2} = x^{-1}$

Ö40. Lös i följande ekvationer ut y uttryckt i x:

(a) $3y^2 + 5xy = 2x^2$ (b) $y^2 + 3xy - 10x^2 + y + 5x = 0$

(c) $2y^2 - 2x^2 - 3xy + 3x + y - 1 = 0$ (d) $x^2 + 5y^2 + 2xy = 8y - 3$

Om *ekvationen* $x^2+px+q = 0$ har lösningarna x_1 och x_2, så kan *polynomet* $x^2 + px + q$ **faktoriseras**:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Anmärkning. Om $(p/2)^2 - q < 0$, så är x_1 och x_2 icke-reella, och i så fall kan $x^2 + px + q$ **ej** faktoruppdelas med *reella* tal. (Däremot kan $x^2 + px + q$ alltid faktoruppdelas med *komplexa* tal).

Av likheten $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = x \cdot x - x_1 \cdot x - x \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2 =$
$= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$ fås följande **samband mellan lösningar och koefficienter till en andragradsekvation**:

om x_1 och x_2 är lösningarna till $x^2+px+q = 0$ så gäller att $x_1+x_2 = -p$ och $x_1 \cdot x_2 = +q$.

Exempel: Faktorisera $1 - 2x - 3x^2$.

Lösning: $1-2x-3x^2 =$ [bryt ut koefficienten för x^2] $= (-3)\cdot\big(x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\big)$. Lös först ekvationen $x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$. Man får $x_1 = 1/3$ och $x_2 = -1$ (visa detta!). Då är $1 - 2x - 3x^2 = (-3) \cdot \big(x - \frac{1}{3}\big) \cdot (x + 1)$ en faktorisering. Den kan även skrivas $(1 - 3x)(x + 1)$.

Ö41. Faktorisera (med reella tal)

(a) $x^2 + x - 6$ (b) $8 - 6x - 2x^2$ (c) $x^2 - x - 1$ (d) $x^2 + x + 1$

Ö42. Ange ett polynom av grad två med nollställena

(a) 2 och -5 (b) $-\frac{1}{2}$ och $\frac{2}{3}$ (c) $1 + \sqrt{5}$ och $1 - \sqrt{5}$

(d) $2 + i$ och $2 - i$

Ö43. Härled sambanden mellan nollställen och koefficienter utgående från formeln $x_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{(p/2)^2 - q}$.

En ekvation av grad fyra, *som saknar* $x-$ *och* x^3*-termer*, $ax^4 + bx^2 + c = 0$, kan med (substitutionen $x^2 = z$) överföras till en ekvation av grad två (för z), $az^2 + bz + c = 0$.

Om denna ekvation av grad 2 har lösningarna z_1 och z_2, så har den ursprungliga ekvationen (av grad fyra) lösningarna $x_{1,2} = \pm\sqrt{z_1}$ och $x_{3,4} = \pm\sqrt{z_2}$, ty $x^2 = z$.

Exempel: $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$. Sätt $x^2 = z$. Då fås $z^2 - 20z + 64 = 0$ med lösningar $z_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100 - 64} = 10 \pm 6$, d.v.s. $z_1 = 16$ och $z_2 = 4$.

$x^2 = z_1 = 16$ ger $x_{1,2} = \pm\sqrt{16} = \pm 4$ och $x^2 = z_2 = 4$ ger $x_{3,4} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$, d.v.s. lösningarna till $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ är $4, -4, 2$ och -2.

OBS: En ekvation av grad fyra har alltid fyra lösningar, (som kan vara olika eller lika).

Ö44. Lös ekvationen

(a) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ (b) $1225 - 74x^2 + x^4 = 0$ (c) $x^4 - x^2 - 12 = 0$

(d) $24x^2 = 72 + 2x^4$ (e) $6x^4 = 7x^2 + 3$

Anmärkning. Flera olika typer av ekvationer (t.ex. rot-, exponential- och trigonometriska) kan i vissa fall med lämpliga *substitutioner* överföras till ekvationer av grad två.

Ö45. Lös ekvationerna

(a) $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$, (sätt $2^x = z$) (b) $3^x = 4 - 3^{1-x}$, (sätt $3^x = z$)

(c) $x + 6\sqrt{x} = 1$, (sätt $\sqrt{x} = z$).

8 Faktorsatsen. Ekvationer av gradtal större än två.

Faktorsatsen: Om $p(x)$ är ett polynom i x och $p(x_1) = 0$, d.v.s. om x_1 är en lösning till polynomekvationen $p(x) = 0$, så är $(x - x_1)$ en *faktor* i $p(x)$, d.v.s.

$$p(x) = (x - x_1) \cdot q(x),$$

där $q(x)$ är ett polynom med en enhet lägre gradtal än $p(x)$. En lösning till $p(x) = 0$ kallas ett *nollställe* till polynomet $p(x)$.

Exempel: Lös ekvationen $x^3 - 9x + 10 = 0$.

Lösning: Efter prövning (av t.ex. $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) finner man att $x_1 = 2$ är en lösning, för $2^3 - 9 \cdot 2 + 10 = 8 - 18 + 10 = 0$. Enligt faktorsatsen är då $x^3 - 9x + 10$ delbart med $x - x_1 = x - 2$.

Metod 1: S.k. lång division med $(x - 2)$ (Se paragraf 1.6) ger $x^3 - 9x + 10 =$
$= (x - 2) \cdot (x^2 + 2x - 5)$. (Genomför räkningarna!).

Metod 2: Ansätt $x^3 - 9x + 10 = (x - 2)(a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$. Man ser direkt (genom multiplicering av parenteserna i högra ledet), att $a = 1$ och $c = -5$. Då är $x^3 - 9x + 10 = (x - 2) \cdot (x^2 + b \cdot x - 5) = x^3 + b \cdot x^2 - 5x - 2x^2 - 2bx + 10 = x^3 + (b - 2)x^2 - (5 + 2b)x + 10$, varav fås $b = 2$, (vid jämförelse av första och sista ledet).

Vi har alltså $x^3 - 9x + 10 = (x - 2)(x^2 + 2x - 5) = 0$, där $x_1 = 2$.
Ekvationen $x^2 + 2x - 5 = 0$ ger $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1 + 5} = -1 \pm \sqrt{6}$.

Svar: Lösningarna är $x_1 = 2, x_2 = -1 + \sqrt{6}$ och $x_3 = -1 - \sqrt{6}$.

Anmärkning. En ekvation av grad tre har tre lösningar, (lika eller olika).

Exempel: Faktorisera (med reella tal) $x^3 - 3x^2 + 6x - 4$.

Lösning: Ekvationen $x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = 0$ har lösningen $x_1 = 1$. Man finner (genom division med $(x - 1)$) att $x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = (x - 1)(x^2 - 2x + 4)$. Ekvationen $x^2 - 2x + 4 = 0$ har imaginära lösningar (visa detta!). Polynomet $x^2 - 2x + 4$ kan därför **inte** ytterligare faktoruppdelas med *reella* tal.

Svar: $x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = (x - 1)(x^2 - 2x + 4)$

Exempel: Lös ekvationen $(x^2 - 2x - 7)^2 = 0$.

Lösning: Först löses ekvationen $x^2 - 2x - 7 = 0$, som har lösningarna $x_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$. Den givna ekvation, som är av fjärde graden, skall ha fyra lösningar. Ekvationen kan skrivas:

$$(x^2 - 2x - 7)(x^2 - 2x - 7) = 0.$$

Av detta inser man att $x_3 = x_1 = 1 + 2\sqrt{2}$ och att $x_4 = x_2 = 1 - 2\sqrt{2}$.

Svar: Lösningarna är $1 + 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}$, $1 - 2\sqrt{2}$ och $1 - 2\sqrt{2}$ (*dubbla lösningar*).

Ö46. Lös ekvationerna

(a) $x^3 + 3x^2 + x = 0$ (b) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

(c) $2x^3 + 14x^2 + 22x + 4 = 0$ (d) $6 + 3x^2 - 5x - x^3 = 0$

(e) $x^4 + x^3 + 2x - 4 = 0$ (f) $3 \cdot x^{-2} + 18 \cdot x^{-3} = 1 + 4 \cdot x^{-1}$

Ö47. Lös ekvationerana

(a) $(x - 1)^3 = 0$ (b) $x^3 - 1 = 0$ (c) $(x^2 + 1)^3 = 0$

(d) $(x^3 + 1)^2 = 0$

Ö48. Faktorisera (med reella tal):

(a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ (b) $x^3 + 7x^2 + 11x + 2$

(c) $2x^3 + 4x^2 + x + 2$ (d) $6 + 3x^2 - 5x - x^3$ (e) $12x + 4x^3 - 2x^4 - 8x^2 - 6$

Här är några exempel på andra typer av ekvationer:

Exempel: Lös ekvationen $\dfrac{5x+7}{4x-14} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{3x+11}{2x-7}$

Lösning: Multiplikation med minsta gemensamma nämnaren $6(2x-7) \neq 0$ ger ekvationen $3(5x+7) - 2(2x-7) = 6(3x+11)$ d.v.s. $15x + 21 - 4x + 14 = 18x + 66$ eller $(15 - 4 - 18)x = 66 - 21 - 14$ d.v.s. $-7x = 31$ med lösning $x = -\dfrac{31}{7} = -4\dfrac{3}{7}$

Ö23. Lös ekvationen

(a) $\dfrac{3x}{7} = 2\dfrac{1}{13}$ (b) $\dfrac{25x - 0,05}{0,4} - \dfrac{0,5 + 10x}{2} = 0,2$ (c) $\dfrac{x-1}{x+2} = 3$

(d) $\dfrac{2}{x+3} + \dfrac{x}{x^2-9} + \dfrac{1}{6-2x} = \dfrac{5}{2(x+3)}$ (e) $\left[\dfrac{x+1}{x-1} - 1\right] : \left[1 + \dfrac{1}{x-1}\right] = \dfrac{1}{2}$

Ö23′. En pappa, som är 33 år, är 66 gånger så gammal som sin son. När blir han endast 6 gånger så gammal?

9 Rotekvationer

En rotekvation är en ekvation, där den obekanta storheten förekommer under rotmärke. En sådan ekvation kan (ibland) lösas med bortskaffande av rotmärket genom en eller flera *kvadreringar*, (eventuellt efter överflyttning av vissa termer).

> **OBS**: Den kvadrerade ekvationen kan ha fler lösningar än den ursprungliga rotekvationen. *Prövning* av lösningarna är därför nödvändig!

Man har nämligen att $q(x) = \sqrt{p(x)} \Rightarrow (q(x))^2 = p(x)$, men att $(q(x))^2 = p(x) \Rightarrow q(x) = \pm\sqrt{p(x)}$. När man löser ekvationen $(q(x))^2 = p(x)$ löser man i själva verket två ekvationer samtidigt nämligen $q(x) = \sqrt{p(x)}$ **och** $q(x) = -\sqrt{p(x)}$. Vid prövning av en lösning räcker det att avgöra till vilken av dessa båda ekvationer lösningen hör.

Exempel: Lös ekvationen $1 + \sqrt{x^2+5} = 2x$.

Lösning: Ekvationen kan skrivas $\sqrt{x^2+5} = 2x - 1$. Kvadrering ger $x^2 + 5 = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$, d.v.s. $3x^2 - 4x - 4 = 0$, som löses. Man får $x_1 = 2$ och $x_2 = -2/3$. Nu måste *prövning* ske genom insättning i den givna ekvationen, *eller* (*bättre*) genom prövning i ekvationen $\sqrt{x^2+5} = 2x - 1$, varvid *endast tecknet behöver prövas*, eftersom $q^2 = p \Leftrightarrow q = \pm\sqrt{p}$):
$x_1 = 2$ ger *vänster led*: $VL = 1 + \sqrt{x^2+5} = 1 + \sqrt{4+5} = 1 + \sqrt{9} = 1 + 3 = 4$ och *höger led*: $HL = 2x = 2 \cdot 2 = 4$. Därmed *är* $x_1 = 2$ en lösning till den givna ekvationen.

$x_2 = -2/3$ ger $VL = 1 + \sqrt{\frac{4}{9} + 5} = 1 + \sqrt{\frac{40}{9}} = 1 + \frac{7}{3} = 10/3$, men $HL = 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) =$
$= -4/3$. Därmed är $x_2 = -2/3$ *inte* en lösning till den givna ekvationen. (Lösningen $x_2 = -2/3$ är en s.k. *falsk lösning*, som dykt upp på grund av kvadreringen).

Svar: Ekvationen har lösningen $x_1 = 2$.

Anmärkning. $x_2 = -2/3$ är lösning till ekvationen $1 - \sqrt{x^2+5} = 2x$.

Ö49. Lös ekvationerna

(a) $3 + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 2x$ (b) $x + 2\sqrt{x} = 8$ (c) $\sqrt{x + 132} = x$

(d) $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+6} - x = 3$ (e) $2x + \sqrt{x^2 + x} = 1$

(f) $\sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x-5}$

10 Linjära ekvationssystem. (Ekvationer av första graden med två eller flera obekanta)

Vid lösning av ekvationer med flera obekanta försöker man genom *elimination* skaffa sig en ekvation, som bara innehåller en obekant.

Exempel: Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 7x + 3y = 1 \end{cases}$

Metod 1: (Substitutionsmetoden): Den första ekvationen ger $x = (5 - 2y)/3$, som insättes (substitueras) i den andra ekvationen. Då fås $7(5 - 2y)/3 + 3y = 1$, d.v.s. $35 - 14y + 9y = 3$ eller $32 = 5y$, varför $y = 32/5 = \underline{6,4}$ och $x = (5 - 2y)/3 = -13/5 = \underline{-2,6}$.

Metod 2: (Additionsmetoden): Multiplicera (för att eliminera x) de givna ekvationerna med 7 resp. (-3) och addera:

$$\begin{cases} 21x + 14y = 35 \\ -21x - 9y = -3 \end{cases}$$
$$5y = 32$$

Från detta får man $y = 32/5 = \underline{6,4}$, som insatt i en av de givna ekvationerna (vilken som helst) ger $x = -13/5 = \underline{-2,6}$.

Svar: $x = -2,6$ och $y = 6,4$

OBS: Man bör alltid *kontrollera svaret* genom insättning i de givna ekvationerna!

Anmärkning 1. I exemplet ovan gäller att:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 7x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ \phantom{3x + {}} 5y = 32 \end{cases}$$

där det högra ekvationssystemet är *triangulärt*, d.v.s. koefficienterna för x och y bildar en triangel.

Anmärkning 2. Den linjära ekvation $ax + by = c$ betyder geometriskt en **rät linje**. Ett system av två sådana linjära ekvationer har alltså

a) *en*, b) *ingen* eller c) *oändligt* många lösningar beroende på om de räta linjerna är a) *skärande* b) *parallella* (och olika) eller c) *sammanfallande*.

Ö25. Lös ekvationssystemen

(a) $\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ x + y = 5 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 7x + 5y = -4 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 9x - 6y = 8 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} 5x + y = 3 \\ 10x + 2y = 6 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 15x + 14y = 59 \\ 12x - 35y = 1 \end{cases}$ (g) $\begin{cases} 1/x + 1/y = 5/6 \\ 1/x - 1/y = 1/6 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} 6x + 5y + z = 45 \\ 5x + 2y - z = 23 \\ 13x - 7y + z = 6 \end{cases}$ (i) $\begin{cases} 2x - y + z = 20,1 \\ x + y - z = 9,9 \\ 3x + 2y + 8z = 30,4 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x - y + 2z = 2 \\ 3x - 2y + z = -3 \end{cases}$ (k) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ 3x + y + 2z = 7 \\ 5x + 4y + z = 0 \end{cases}$

Ö26. En person som tillfrågades om sin ålder svarade: ”För 9 år sedan var jag 26 gånger så gammal som min son, men om 2 år blir jag bara 4 gånger så gammal.” Hur gammal var han?

11 Ekvationssystem av högre grad

Vissa system av ekvationer med två (eller flera) obekanta kan lösas med (substitutionsmetoden):

Exempel: Lös ekvationssystemet $\begin{cases} (x+y)(x-1) = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 = 4 & (2) \end{cases}$

Lösning: Ekvation (1) ger $x + y = 0$ *eller* $x - 1 = 0$.

Fall 1: $\underline{x + y = 0}$, d.v.s. $y = -x$ ger insatt i ekvation (2), $x^2 + x^2 = 4$, varav fås $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Men $y = -x$. Vi får alltså lösningarna

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ y_1 = -\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} x_2 = -\sqrt{2} \\ y_2 = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Fall 2: $\underline{x - 1 = 0}$, d.v.s. $x = 1$ ger insatt i ekvation (2), $1 + y^2 = 4$, varav fås $y_{3,4} = \pm\sqrt{3}$. Vi får alltså lösningarna $x_3 = 1$, $y_3 = \sqrt{3}$ och $x_4 = 1$, $y_4 = -\sqrt{3}$.

Svar: (x, y) är lika med $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(1, \sqrt{3})$ eller $(1, -\sqrt{3})$.

Anmärkning. Geometriskt betyder ekvation (1) (i exemplet ovan) två räta linjer och ekvation (2) en cirkel. Lösningarna är alltså koordinaterna för skärningspunkterna. (Rita figur!).

Ö50. Lös ekvationssystemen

(a) $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2-y^2=6 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+3y^2=6 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} (y+2)(x+y+1)=0 \\ x^2+y^2+4y=9 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x^2-xy=x \\ x^2+3y^2=6 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} 2y^2+xy+4x^2=10 \\ y^2-2xy+12x^2=5 \end{cases}$

12 Olikheter

För olikheten $a > b$ gäller bl.a. följande räkneregler:

$$\begin{array}{lll} a > b \Leftrightarrow a-b > 0 & a > b \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c, & \text{om} \quad c > 0 \\ a > b \Leftrightarrow -a < -b & a > b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c, & \text{om} \quad c < 0 \\ a > b \Leftrightarrow a+c > b+c & a > b \Leftrightarrow a/c > b/c, & \text{om} \quad c > 0 \\ a > b \Leftrightarrow a-c > b-c & a > b \Leftrightarrow a/c < b/c, & \text{om} \quad c < 0 \end{array}$$

För olikheterna $a < b, a \geq b$ och $a \leq b$ gäller liknande regler.

OBS: $a > b \Leftrightarrow b < a$ och $a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$.

Vid behandling av olikheter (nedan): flytta alltid över termer, så att *ena ledet blir* 0.

Exempel: För vilka x är $2x^3 < 7x^2 + 5x - 4$?

Lösning: Olikheten kan skrivas $p(x) = 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4 < 0$. Ekvationen $2x^3 - 7x^2 - 5x + 4 = 0$ har lösningarna $x_1 = -1$, $x_2 = 1/2$ och $x_3 = 4$ (visa detta!). Enligt faktorsatsen är då $p(x) = 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4 = 2(x+1)(x - \frac{1}{2})(x-4)$.

För att bestämma de x, för vilka $p(x) < 0$, kan vi sätta upp följande teckentabell:

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < \frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
$(x+1)$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	$+$	$+++$
$(x-\frac{1}{2})$	$---$	$-$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$
$(x-4)$	$---$	$-$	$---$	$-$	$---$	0	$+++$
$p(x)$	$---$	0	$+++$	0	$---$	0	$+++$

Vi finner att $p(x) < 0$, om $x < -1$ eller $\frac{1}{2} < x < 4$.

Svar: Olikheten gäller, om $x < -1$ eller $1/2 < x < 4$.

Exempel: För vilka x är $\dfrac{1}{x} \geq 2x-1$?

Lösning: Olikheten kan skrivas:

$$R(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{1-2x^2+x}{x} \geq 0.$$

$R(x)$ är en rationell funktion, där täljare (och nämnare) kan faktoruppdelas. Täljaren $T(x) = 1-2x^2+x$ har nollställena $-1/2$ och 1. Därför är $T(x) = (-2)(x+1/2)(x-1) = -(2x+1)(x-1) = (2x+1)(1-x)$ och $R(x) = (2x+1)(1-x)/x$.

Vi får följande teckentabell:

	$x<-1/2$	$x=-1/2$	$-1/2<x<0$	$x=0$	$0<x<1$	$x=1$	$x>1$
$2x+1$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	$+$	$+++$
$1-x$	$+++$	$+$	$+++$	$+$	$+++$	0	$---$
x	$---$	$-$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$
$R(x)$	$+++$	0	$---$	ej def.	$+++$	0	$---$

Vi ser att $R(x) \geq 0$, om $x \leq -1/2$ eller $0 < x \leq 1$. (För $x=0$ är $R(x)$ ej definierad.)

Anmärkning. Man kan också skriva $R(x) = (-2)(x+1/2)(x-1)/x$ och bilda en teckentabell med faktorerna $(-2), (x+1/2), (x-1)$ och x. (Gör detta!)

Svar: Den givna olikheten gäller, om $x \leq -1/2$ eller $0 < x \leq 1$.

OBS: Den givna olikheten (i exemplet ovan) får *inte* multipliceras med x, d.v.s. den får *inte* skrivas $1 \geq x(2x-1)$. Värdet på x kan nämligen vara *negativt*.

Ö51. För vilka x gäller följande olikheter?

(a) $1 \geq 2x^2 - x$ (b) $x^2 + x < 1$ (c) $x^2 + 1 \leq x$ (d) $x^2 > 2x - 1$

(e) $x^3 + 2x > 3x^2$ (f) $6x^3 < 17x^2 + 4x - 3$ (g) $x + 3 \geq \dfrac{2x}{x-2}$

(h) $(x-1)^2 \leq \dfrac{3}{x+1}$ (i) $\dfrac{1}{x} < \dfrac{x}{2} < \dfrac{2}{x}$ (studera först de båda olikheterna var för sig).

13 n:te roten ur ett reellt tal. Potenser med rationell exponent.

Definition:

Med $\sqrt[n]{b}$ menas den reella (och *positiva*, om $n = 2m$ är *jämnt*) lösningen till $x^n = b$, d.v.s. $(\sqrt[n]{b})^n = b$.

Ekvationen $x^n = b$, där b reellt, har då följande (reella) lösningar:

1) $x = \sqrt[n]{b}$, om $n = 2m+1$ är ett udda (positivt) heltal,

2) $x = \pm\sqrt[n]{b}$, där $\sqrt[n]{b} \geq 0$, om $b \geq 0$ och $n = 2m$ är ett jämnt (positivt) heltal.

Dessutom har $x^n = b$ alltid *komplexa* lösningar, om $n > 2$, $b \neq 0$. Om n är jämnt och $b < 0$, så saknar $x^n = b$ reella lösningar och $\sqrt[n]{b}$ är *inte definierat*. För *udda* $n = 1, 3, 5, \ldots$ gäller att: $\sqrt[n]{-b} = -\sqrt[n]{b}$.

Definition:

$$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}, \text{ och (för } b > 0\text{) } b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}.$$

Exempelvis gäller för den vanliga *kvadratroten*, att

$$\sqrt{b} = \sqrt[2]{b} = b^{1/2} \quad \text{för} \quad b \geq 0$$

Man kan visa, att *potensuttrycket* $b^{\frac{m}{n}}$ med rationell exponent $x = \dfrac{m}{n}$ för $b > 0$ satisfierar de *allmänna potens- (eller exponential-)lagarna*:

$$b^x \cdot b^y = b^{x+y},\ b^x/b^y = b^{x-y},\ 1/b^y = b^{-y},\ (b^x)^y = b^{x\dot{y}},$$
$$(ab)^x = a^x \cdot b^x \quad \text{och} \quad (a/b)^x = a^x/b^x.$$

Det är samma lagar som för heltalsexponenter. För *n:te rötter* gäller då (för $b > 0$) bl.a. följande räkneregler:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[mn]{b} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{b}}\,(= b^{\frac{1}{mn}}) \qquad (\sqrt[n]{b})^m = \sqrt[n]{b^m}\,(= b^{\frac{m}{n}}),$$
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a/b}.$$

För uttrycken $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{a+b}$ och $\sqrt[n]{a-b}$ finns inga allmänna formler. Exempelvis är i allmänhet $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$, (alltför vanligt *fel* att tro motsatsen!).

Exempel:

a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$ för $a \geq 0$.

b) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{2}} = (2^{1/3})^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{18}} = \sqrt[18]{2}$

c) $\sqrt[12]{125} = \sqrt[12]{5^3} = (5^3)^{\frac{1}{12}} = 5^{\frac{3}{12}} = 5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5}$

d) $\sqrt[2n]{x^2} = \sqrt[n]{\sqrt{x^2}} = \sqrt[n]{|x|}$

Ö52. Förenkla

(a) $27^{1/3}$ (b) $4^{-0,5}$ (c) $(\sqrt{8})^{2/3}$ (d) $2^{1/3} \cdot 2^{-4/3}$ (e) $3^{1/2}/9^{-3/4}$

(f) $3^{-2/3}/(1/3)^{-4/3}$ (g) $(0,0016)^{-0,25}$

Ö53. Förenkla

(a) $\sqrt[6]{9}$ (b) $\sqrt[6]{8}$ (c) $\sqrt[3]{-24}$ (d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}$ (e) $\sqrt[5]{\sqrt{2}}$

(f) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}$ (g) $4/\sqrt[3]{16}$ (h) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[6]{9} + \sqrt{12} - \sqrt[6]{27} - \sqrt[3]{3\sqrt{3}}$

Ö54. Bestäm de *reella* lösningarna till

(a) $x^8 = 16$ (b) $x^5 = 243$ (c) $64x^6 - 27 = 0$

(d) $x^3 + 8 = 0$ (e) $x^4 + 8 = 0$

Ö55. Förenkla (och ange definitionsmängd):

(a) $\sqrt[3]{3a^2} \cdot \sqrt[3]{9a}$ (b) $\sqrt{x}/\sqrt[4]{x}$ (c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}}$ (d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}}$

(e) $\sqrt[4]{a^3}/\sqrt[3]{a}$ (f) $\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$

14 Allmänna potenser (Potens- och exponentialfunktioner)

Vi har ovan definierat vad som menas med uttrycket b^x, då $b > 0$ och $x = \dfrac{m}{n}$ är ett rationellt tal. Man kan allmännare definiera uttrycket b^x för $b > 0$ och alla reella x, så att *potens- och exponentiallagarna* gäller (för a och $b > 0$):

$$b^{x+y} = b^x \cdot b^y, \quad b^{x-y} = b^x/b^y, \quad b^{-y} = 1/b^y, \quad b^{x \cdot y} = (b^x)^y,$$
$$a^x \cdot b^x = (ab)^x, \quad a^x/b^x = (a/b)^x$$

b^x kallas för en *potens* av b, b kallas *bas* och x kallas *exponent*.

OBS: Man skiljer på potens- och exponentialfunktioner:

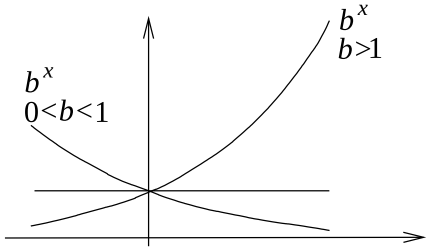
Potensfunktion: $f(x) = x^a$ (x=variabel, a=konstant)
Exponentialfunktion: $f(x) = b^x$ (x=variabel, b=konstant>0).

OBS:

a) $b^x > 0$ för alla x, d.v.s. kurvan $y = b^x$ ligger ovanför x-axeln,

b) $b^0 = 1$, d.v.s. $y = b^x$ går genom punkten $(x, y) = (0, 1)$ för alla $b > 0$,

c) $y = f(x) = b^x$ är $\begin{cases} \text{växande (för växande } x\text{), om } b > 1 \\ \text{avtagande (för växande } x\text{), om } 0 < b < 1. \end{cases}$



Av speciellt intresse är *den naturliga* exponentialfunktionen:

$$f(x) = e^x \quad \text{med basen} \quad e = 2,71828\ldots.$$

(Tangenten till $y = e^x$ i punkten $(x, y) = (0, 1)$ har riktningsvinkeln 45°.) För e^x gäller alltså att

$$e^0 = 1, \quad e^x > 0 \text{ för alla } x, \quad e^x \text{ växande för alla } x$$

samt *exponentiallagarna*:

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y, \quad e^{x-y} = e^x/e^y, \quad e^{-y} = 1/e^y \text{ och } e^{x \cdot y} = (e^x)^y$$

OBS: e^{x+y} är (i allmänhet) *inte* lika med $e^x + e^y$. (Alltför vanligt fel att tro motsatsen). Exempelvis är, för $x = y = 0$, $e^{x+y} = e^0 = 1$ men $e^x + e^y = e^0 + e^0 = 2$.

Exempel: (förenkla): $(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 3^2 = 9$.

Exempel: Lös ekvationen $2^x + 2^{x-1} = 6$.

Lösning: Ekvationen kan skrivas $2^{x-1}(2 + 1) = 6$, d.v.s. $2^{x-1} = 2$, varför $x - 1 = 1$, d.v.s. $\underline{x = 2}$.

(Alternativ lösningsmetod: Sätt $2^x = z$. Genomför räkningarna!)

Exempel: Bestäm reella lösningar till ekvationen $e^{2x} + e^x - 2 = 0$.

Lösning: Sätt $e^x = z$. Då är $e^{2x} = (e^x)^2$ och vi får ekvationen $z^2 + z - 2 = 0$ med lösningar $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$, d.v.s. $z_1 = 1$ och $z_2 = -2$.

Fall 1: $e^x = z_1 = 1 = e^0$ ger $x_1 = 0$.

Fall 2: $e^x = z_2 = -2$ är en orimlighet, då $e^x > 0$ för alla reella x.

Svar: Ekvationen har den reella lösningen $x_1 = 0$.

Ö56. Förenkla

(a) $(2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$ (b) $e^{\sqrt{2}} \cdot e^{\sqrt{8}} \cdot e^{-\sqrt{18}}$ (c) $8^{\sqrt{2}} \cdot 2^{-\sqrt{8}}/(\sqrt{2})^{\sqrt{8}}$

Ö57. Visa att

(a) $2^{\sqrt{2}} < \sqrt{8}$ (b) $2^{\sqrt{2}} > \sqrt[5]{128}$ (c) $2^{\sqrt{2}} \cdot 2^{\sqrt{8}} > 4^{2,1}$

Ö58. Bestäm reella lösningar till

(a) $2^x = 64$ (b) $4^x = 8$ (c) $4^x = -8$

(d) $5^{x+1} + 3 \cdot 5^x = 8$ (e) $3^x + 2 \cdot 3^{x-1} = 45$ (f) $6 \cdot 4^x - 4^{x+2} = 16$

(g) $4 \cdot 8^x + 3 \cdot 2^{3x+1} = 5$

Ö59. Bestäm reella lösningar till

(a) $e^{2x} + 2 \cdot e^x = 3$ (b) $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

(c) $2^{2x} + 2^{x+1} = 2^{x-1} + 1$ (d) $2^x + 2^{3-x} = 9$ (e) $e^{3x} + 4e^{2x} - e^x - 4 = 0$

Svar till övningsuppgifterna

1a) $9t-u-9v$ b) $2a+12c+73x$

2a) $p+r$ b) $2c+3b$ c) $4a-2c$

3a) 25 b) 32 c) 81 d) −64 e) 1 f) 100 g) 1 h) 1

4a) $20x^2z^8$ b) $-27a^4b^5c^4$ c) $14p^3q^9r^4s^2$

5a) $27x^6y^3$ b) $-128a^8b^7c^6$ c) a^4p_b7p

6a) $2x^2+3xy-2y^2$ b) $2x^3+x^2y-5xy^2+2y^3$ c) a^5+x^5 d) $6-13x+2x^2+x^3-2x^4$

7a) $9a^2-24ab+16b^2$ b) $a^6+4a^3b^2+4b^4$ c) $2m^8+32$

8a) $36-x^2$ b) a^4-y^2 c) $x^{12}-81$

9a) $y^3+9y^2x+27yx^2+27x^3$ b) $27x^3+54x^2y^2+36xy^4+8y^6$

c) $x^{12}-18x^9+108x^6-216x^3$

10a) $(x-a^2)(x+a^2)$ b) $x^2(3x+5)(3x-5)$ c) $(x+9)^2$ d) $x^2y(x-2y)^2$

e) $x(x-1)(x^2+x+1)$ f) $3(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)$ g) $x^2(1-x)(1+x)(1+x^2)$

h) $2x^2y(3y^2-2x)(9y^4+6y^2x+4x^2)$

11a) $(x+2)^2-3$ b) $4(x-9/2)^2+19$ c) $39-(x+6)^2$

12a) −1 för $x=-1$ b) 2/3 för $x=1/3$ c) −16 för $x=\pm 2$

d) 1 för $x=0$

13a) 11 för $x=2$ b) 1,05 för $x=0,1$

14a) $x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$ b) $1-7y+21y^2-35y^3+35y^4-21y^5+7y^6-y^7$

c) $32x^5+80x^4a^2+80x^3a^4+40x^2a^6+10xa^8+a^{10}$

d) $x^6y^{12}-18x^5y^{10}z+135x^4y^8z^2-540x^3y^6z^3+1215x^2y^4z^4-1458xy^2z^5+729z^6$

15a) $1\frac{1}{12}=\frac{13}{12}$ b) −2

16a) 1/4 b) −1/27 c) 1

17a) 2^{-6} b) 2^2 c) 2^{-4}

18a) $\frac{3a^6}{8c^2}$ b) $\frac{8y}{9x}$ c) $\frac{2a+y}{2a}$ d) $3xy+5y-2x$

19a) $2/(b-a)$ b) $x^2(1+2x)/(1-2x)$ c) $-1/(y-x)^2$ d) $(b^4+3)/(b^4-3)$

e) $(a^2+ab+b^2)/(a-b)$ f) $(a+1)/a$ g) $(x^2+4)/(x^2+2x+4)$

20a) a^2-ab+b^2 b) $a^3+a^2b+ab^2+b^3$ c) $(a^4+b^4)/(a+b)$

d) $-(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

21a) $x-y^2$ b) $(x^2+1)(x-1)/(x^3-x^2+x)$ c) x/y d) 1/2

22a) $\frac{18}{x(x^2-9)}$ b) $\frac{2x^2-7x-2}{2x(x-4)}$ c) $\frac{-1}{x(x^2-1)}$ d) $\frac{8-2x^2-x^3}{4(x+2)(x^3-8)}$

23a) $x=4\frac{11}{13}=\frac{63}{13}$ b) $x=0,01$ ~~c~~ d) Identitet för $x\neq\pm 3$ ~~d~~ e) $x=4$

c) $x=-7/2$

23') Efter 6 år

24a) $x^2+1+\frac{1}{x^2-1}$ b) $1+\frac{x+1}{x^4-1}=1+\frac{1}{x^3-x^2+x-1}$ c) $2x-2+\frac{9x-2}{x^2+5x-3}$

d) x^2-3x+2 e) $x^2-2x+5-\frac{4}{2x+1}$ f) $x^2+\frac{1}{3}-\frac{2(x-1)}{3(3x^2-x-2)}=x^2+\frac{1}{3}-\frac{2}{3(3x+2)}$

25a) $x=3,5$, $y=1$ b) $x=4$, $y=1$ c) $x=-2$, $y=+2$ d) saknar lösning

e) oändligt många lösningar: $x=t$, $y=3-5t$, (alla reella t)

f) $x=3$, $y=1$ g) $x=2$, $y=3$ h) $x=3$, $y=5$, $z=2$

i) $x=10$, $y=-0,04$, $z=0,06$ j) $x=-1$, $y=1$, $z=2$ k) $x=1$, $y=-2$, $z=3$

26) 48 år l) $x=1$, $y=-2$, $z=3$ m) $x=-1,6$, $y=0,3$, $z=2$

n) $x=13/5$, $y=1$, $z=-6/5$, $w=1$

27a) 7 b) 7 c) 0

28a) $x_1=0$, $x_2=-2$ b) $x_1=10,5$, $x_2=-4,5$ c) $x=-4$

d) $x_1=4$, $x_2=-1$ e) saknar lösning

29a) $-1\leq x\leq 3$ b) $-8<x<2$ c) $-1\leq x<0$ och $4<x\leq 5$ d) $x=-2$

30a) $x_1=2,5$, $x_2=-1,5$ b) alla x där $-1\leq x\leq 2$ c) $x_1=0$, $x_2=-7,5$

d) $x=-5$

31a) 0,7 b) 300 c) $15\cdot\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}/5$ e) $\sqrt{3}$ f) $10-\sqrt{2}$

32a) $x_1=5$, $x_2=-5$ b) $x_1=\sqrt{5}$, $x_2=-\sqrt{5}$ c) $x_{1,2}=\pm 2/3$

d) $x_{1,2}=\pm 2\sqrt{6}/3$ e) $x_1=x_2=0$

33a) $\sqrt{6}/3$ b) $\sqrt{21}/7$ c) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ d) $\sqrt{11}+3$ e) $-(2+\sqrt{5})$ f) $3-2\sqrt{2}$

34a) $|x+2|$, alla x b) +1 för $x>0$, −1 för $x<0$ c) 1, $x>0$

d) $-x\cdot\sqrt{9-x}$, $x<9$ e) $1/\sqrt{x-2}$, $x>2$

f) $\sqrt{x+2}$ för $x>0$, $-\sqrt{x+2}$ för $-2\leq x<0$

35a) $x_1 = 2i,\ x_2 = -2i$ b) $x_{1,2} = \pm i\sqrt{3}/5$ c) $x_{1,2} = \pm i\sqrt{3}/2$

d) $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}/2$ e) $x_1 = 2 + 3i,\ x_2 = 2-3i$ f) $x_{1,2} = -1 \pm 2i$,

g) $x_{1,2} = \pm 2,\ x_{3,4} = \pm 2i$.

36a) $2+5i$ b) $7-11i$ c) $-7-24i$ d) $\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$ e) $\frac{1}{17} + \frac{4}{17}i$ f) $-\frac{1}{17} + \frac{13}{17}\cdot i$

g) $\frac{61}{170} + i\frac{23}{170}$.

37a) $x_1 = 1,\ x_2 = -4$ b) $x_1 = 3,\ x_2 = -1$ c) $x_1 = 3/2,\ x_2 = -1$,

d) $x_1 = 0,\ x_2 = -3/7$ e) $x_1 = x_2 = 3/2$ f) $x_{1,2} = (-3 \pm\sqrt{29})/10$.

38a) $x_1 = -1 + i,\ x_2 = -1-i$ b) $x_{1,2} = (-3 \pm i\sqrt{11})/10$ c) $x_{1,2} = (3 \pm i\sqrt{3})/6$

39a) $x_1 = 1,\ x_2 = -4$ b) $x_{1,2} = 6 \pm 3\sqrt{3}$ c) $x_{1,2} = (1 \pm i\sqrt{11})/6$

40a) $y = x/3$ eller $y = -2x$ b) $y = 2x-1$ eller $y = -5x$

c) $y = 2x-1$ eller $y = (1-x)/2$ d) $y = [4-x\pm\sqrt{5-4(x+1)^2}]/5$, för

$|x+1| \leq \sqrt{5}/2$.

41a) $(x-2)(x+3)$ b) $-2(x-1)(x+4)$ c) $(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})$ d) x^2+x+1.

42a) $x^2+3x-10 = 0$ b) $6x^2-x-2 = 0$ c) $x^2-2x-4 = 0$ d) $x^2-4x+5 = 0$

44a) $x_{1,2} = \pm 2,\ x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$ b) $x_{1,2} = \pm 7,\ x_{3,4} = \pm 5$ c) $x_{1,2} = \pm 2$,

$x_{3,4} = \pm i\sqrt{3}$ d) $x_1 = x_2 = \sqrt{6},\ x_3 = x_4 = -\sqrt{6}$ e) $x_{1,2} = \pm\sqrt{6}/2,\ x_{3,4} = \pm i/\sqrt{3}$

45a) $x_1 = 1,\ x_2 = 2$ b) $x_1 = 0,\ x_2 = 1$ c) $x = 19-6\sqrt{10}$

46a) $x_1 = 0,\ x_{2,3} = (-3\pm\sqrt{5})/2$ b) $x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ x_3 = -2$

c) $x_1 = -2,\ x_{2,3} = (-5\pm\sqrt{21})/2$ d) $x_1 = 2,\ x_{2,3} = (1\pm i\sqrt{11})/2$

e) $x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_{3,4} = \pm i\sqrt{2}$ f) $x_1 = 2,\ x_2 = x_3 = -3$

47a) $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ b) $x_1 = 1,\ x_{2,3} = (-1\pm i\sqrt{3})/2$ c) $x_1 = x_2 = x_3 = i$,

$x_4 = x_5 = x_6 = -i$ d) $x_1 = x_2 = -1,\ x_3 = x_4 = (1+i\sqrt{3})/2$,

$x_5 = x_6 = (1-i\sqrt{3})/2$

48a) $(x-1)(x-3)(x+2)$ b) $(x+2)(x+5/2-\sqrt{21}/2)(x+5/2+\sqrt{21}/2)$

c) $(x+2)(2x^2+1)$ d) $-(x-2)(x^2-x+3)$ e) $-2(x+1)^2\cdot(x^2+3)$

49a) $x = 2$ b) $x = 4$ c) $x = 12$ d) $x = 3$ e) $x = (5-\sqrt{13})/6$ f) $x = 6$

50a) $x = 5/2,\ y = 1/2$ b) $\begin{cases} x_1 = (3+\sqrt{3})/2 \\ y_1 = (-1+\sqrt{3})/2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = (3-\sqrt{3})/2 \\ y_2 = (-1-\sqrt{3})/2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 = \sqrt{13} \\ y_1 = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -\sqrt{13} \\ y_2 = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = -2 \\ y_3 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = 3 \\ y_4 = -4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = \sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = -\sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = (3+\sqrt{21})/4 \\ y_3 = (-1+\sqrt{21})/4 \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = (3-\sqrt{21})/4 \\ y_4 = (-1-\sqrt{21})/4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = \sqrt{5} \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = -\sqrt{5} \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = 1/2 \\ y_3 = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = -1/2 \\ y_4 = -2 \end{cases}$

51a) $-1/2 \leq x \leq 1$ b) $(-1-\sqrt{5})/2 < x < (-1+\sqrt{5})/2$ c) gällar ej för något x d) alla $x \neq 1$ e) $0 < x < 1$ och $x > 2$ f) $x < -1/2$ och $1/3 < x < 3$ g) $-2 \leq x < 2$ och $x \geq 3$ h) $-1 < x \leq 2$

i) $\sqrt{2} < x < 2$

52a) 3 b) 1/2 c) 2 d) 1/2 e) 9 f) 1/9 g) 5

53a) $\sqrt[3]{3}$ b) $\sqrt{2}$ c) $-2\cdot\sqrt[3]{3}$ d) $\sqrt[12]{3} = 3^{1/12}$ e) $\sqrt[10]{2} = 2^{1/10}$

f) $\sqrt[8]{5} = 5^{1/8}$ g) $\sqrt[3]{4} = 2^{2/3}$ h) $2\cdot\sqrt[3]{3}$

54a) $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ b) $x_1 = 3$ c) $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}/2$ d) $x_1 = -2$ e) saknar reella rötter

55a) $3a$, alla a b) $\sqrt[4]{x} = x^{1/4}$, $x > 0$ c) $\sqrt[15]{x} = x^{1/15}$, alla x

d) $\sqrt{|a|}$, alla a e) $a^{5/12} = \sqrt[12]{a^5}$, $a > 0$ f) $x^{3/4} = \sqrt[4]{x^3}$, $x \geq 0$

56a) [illegible] b) $e^0 = 1$ c) 1

58a) $x = 6$ b) $x = 3/2$ c) saknar reell lösning d) $x = 0$ e) $x = 3$

f) saknar reell lösning g) $x = -1/3$

59a) $x = 0$ b) $x_1 = 0,\ x_2 = 1$ c) $x = -1$ d) $x_1 = 0,\ x_2 = 3$

e) $x = 0$

60a) 3 b) -2 c) 4 d) 0,7 e) 1/4 f) 2

61a) 2 b) 1/2 c) -1 d) -2 e) 7 f) 1/3

62a) $x = 1$ b) $x = 10$ c) $x = e^2$ d) $x = 0{,}0001$ e) $x = 10\cdot\sqrt{10}$

63a) $x = \lg 4$ b) $x = \ln(1{,}5)$ c) $x = \lg 2$ d) $x = \lg 3$ e) $x = \ln 2$