Funktionsbegrebet og 9. klasse elevers begrebsforståelse

Morten Blomhøj

Elevers vanskeligheder med at tilegne sig funktions-begrebet som et teoretisk begreb med et net af relationer til andre begreber som variabel, ligning og graf er velkendte både i matematikdidaktisk forskning og i undervisningens praksis. I det danske skolesystem viser de sig mest markant ved overgangen fra folkeskolens til gymnasiets matematikundervisning. Denne problemstilling belyses i artiklen ud fra en empirisk undersøgelse af begrebsforståelsen hos en 9. klasse. Analysen afdækker fællestræk ved nogle elevers forståelse, der viser at de har meget vanskeligt ved at tilegne sig afgørende begrebssammenhænge mellem f.eks. ligning og funktion. Analyse af to kvalitative elevinterview viser endvidere, at elevernes forståelse kan være både sammenhængende og modstandsdygtig over for udfordringer, selvom den ikke er i overensstemmelse med de objektiverede matematiske betydninger af begreberne. Artiklen fremdrager enkelte undervisningsmæssige konsekvenser af analysen.

1. Funktionsbegrebet og matematikundervisningen

Funktionsbegrebet indtager en helt central placering i såvel skolefaget som videnskabsfaget matematik. Funktion er det grundlæggende objekt for den matematiske analyse og funktionsbegrebet indgår på afgørende måde i så godt som alle matematiske discipliner. Ud fra en intern matematisk betragtning er tilegnelse af funktionsbegrebet afgørende for evt. videregående studier af faget (Kleiner, 1993). Også i anvendelsessammenhænge spiller funktionsbegrebet en vigtig rolle. I samfundslivet møder man eksempler på konkrete funktioner. F.eks. funktioner, der beskriver en tidsmæssig udvikling. Det være sig grafiske repræsentationer af udviklingen i arbejdsløsheden, befolkningen i den fattige del af verden eller CO_2 udledningen fra de industrialiserede lande. Eller funktionsforskrifter der bruges ved beregning af kørselsfradrag, indkomstskat i øvrigt eller el-regningen. Hertil kommer at den sproglige betydning af ordet funktion er under påvirkning af anvendelsen af det matematiske begreb. Ordet funktion har i det naturlige sprog normalt betydningen, at noget har en funktion - en virkemåde. F.eks.: *Chokerens funktion er at regulere luftindtaget til motoren.* I aviserne og i anden offentlig kommunikation møder man imidlertid stadig oftere ordet funktion i betydningen, at noget er en funktion af noget andet. Funktion bliver her brugt til at angive

Morten Blomhøj er lektor ved IMFUFA, Roskilde Universitetscenter

en årsagssammenhæng. F.eks.: *Beskæftigelsen er ikke blot en funktion af den økonomiske vækst, men afhænger også af en række strukturelle forhold.*

Relationen mellem på den ene side dagligdags erfaringer, hvor ordet funktion indgår og situationer fra hverdagslivet, der kan modelleres ved hjælp af funktionsbegrebet og på den anden side elevernes tilegnelse af funktionsbegrebet i matematikundervisningen er således af kompleks natur og dette må forventes at spille en rolle i læreprocessen.

Som matematisk begreb er funktionsbegrebet i meget høj grad indlejret i et netværk af relationer til andre matematiske begreber. Det gælder først og fremmest begreber som variabel, ligning og graf. Disse begrebsmæssige relationer er ofte af komplementær karakter. F.eks. er begrebet om en variabel, der kan antage en vilkårlig værdi inden for en nærmere afgrænset grundmængde, en forudsætning for tilegnelse af funktionsbegrebet samtidig med, at dette variabelbegreb i høj grad får sin mening fra dets anvendelse i forbindelse med funktioner. Hertil kommer, at funktioner optræder i og kan beskrives/symboliseres i mange forskellige repræsentationsformer, f.eks. ved en ligning, en tabel, en graf eller sproglig beskrivelse af en funktionel sammenhæng mellem to variable størrelser. Endvidere findes - allerede når vi betragter funktioner af en variabel - som bekendt en uendelighed af forskellige funktioner. Funktionsbegrebet er svarende hertil et matematisk begreb, som for de fleste mennesker kræver lang tids undervisning og personligt læringsarbejde at begribe i nogle af dets generelle betydninger.

Ud fra en matematikdidaktisk analyse af funktionsbegrebet er der således al mulig grund til at forvente, at der i folkeskolens og gymnasiets matematikundervisning vil være principielle matematiske og didaktiske vanskeligheder med at støtte elevernes tilegnelse af dette begreb. Funktionsbegrebet er derfor et naturligt valg, hvis man ønsker at studere vanskeligheder ved elevers begrebstilegnelse i matematikundervisningen.

1.1 Funktionsbegrebet i folkeskolens matematikundervisning

I skolen er der gennem de sidste to årtier sket en principiel ændring af matematikundervisningens indhold. Funktionsbegrebet indgår ikke længere som en central matematisk begrebsdannelse, der gives en selvstændig systematisk behandling. Der arbejdes imidlertid meget med konkrete eksempler på funktioner - ofte i anvendelsesmæssig sammenhæng. Allerede fra 3.-4. klasse arbejder eleverne med funktionelle sammenhænge mellem variable størrelser. Typisk lægges der stor vægt på processen, hvorunder en variabel talværdi forandres, når den underkastes forskellige regneoperationer. Der arbejdes f.eks. meget med såkaldte funktionsmaskiner. Også koordinatsystemet introduceres tidligt i skoleforløbet (2.-3. klasse) og bruges flittigt til at afbilde funktionelle sammenhænge.

Variationen i de eksempler på funktioner, som en elev typisk møder i sit skoleforløb, begrænser sig imidlertid til lineære funktioner, samt i 9. og 10. klasse til enkelte eksempler på omvendt proportionalitet, andengradspolynomier og eksponentialfunktioner. De fleste lærebøger introducerer først funktion som et fagligt begreb sent i skoleforløbet, typisk på 8. eller 9. klassetrin. Generelt er det min vurdering, at elevernes erfaringer med at beregne og afbilde funktioner i mange forskellige sammenhænge fra undervisningens indledende trin ikke udnyttes som grundlag for en efterfølgende mere systematisk behandling til støtte for præcisering af elevernes begreber om variable, funktioner, ligninger og grafer på de afsluttende skoletrin[1]. Ingen af de lærebogssystemer, jeg har analyseret, lægger op til, at elevernes erfaringer fra arbejdet med funktioner i forskellige sammenhænge gennem deres skoleforløb skal danne grundlag for en systematisk behandling af funktionsbegrebet på de sidste klassetrin. Årsagerne her til er mange og kan ikke udredes i denne sammenhæng. Men et afgørende forhold er den meget udbredte opfattelse blandt matematiklærere og skolefolk i øvrigt, at et sådant sigte er alt for ambitiøst i en matematikundervisning for alle med de givne ressourcemæssige rammer.

1.2 Funktionsbegrebet i gymnasiets matematikundervisning

Siden 60'er matematikken gjorde sit indtog i Danmark, har specielt gymnasiets matematikundervisning haft funktionsbegrebet som omdrejningspunkt. Og selvom der er foregået en betydelig udvikling siden 60'erne, står funktionsbegrebet stadig helt centralt i matematikundervisningen på det gymnasiale niveau. Eleverne præsenteres tidligt i 1. g. forløbet for en formel definition af funktionsbegrebet. F.eks. på denne form:

> *Ved en funktion forstås en sammenkædning af to variable, den uafhængige x og den afhængige y, således at der til ethvert x svarer præcist ét tal y. Tallet y kaldes funktionsværdien af x ved funktionen f, hvor f er betegnelsen for funktionen.*
> *Mængden af de x-værdier, der kan bruges, kaldes funktionens definitionsmængde og betegnes Dm(f). At funktionen kæder tallet y til x, skrives således:*
> $y = f(x)$ *eller* $f: x \to y$

> *Når x gennemløber hele definitionsmængden, gennemløber y = f(x) en talmængde, som kaldes funktionens værdimængde og betegnes Vm(f).* (Jessen et al., 1994, s.187).

Selvom den formelle opbygning af de centrale begreber fra analysen f.eks. kontinuitet, differentialkvotient og differentiabilitet er blevet betydeligt nedprioriteret i gymnasiets matematikundervisning det sidste årti, har disse begreber stadig en central plads i undervisningen. En meningsfuld behandling af disse begreber har helt klart som forudsætning, at eleverne har en grundlæggende forståelse af funktionsbegrebet, der gør det muligt for dem at operere med en funktion som et objekt, der kan have eller ikke have visse matematiske egenskaber. Det er ikke tilstrækkeligt, at eleverne på den ene side fra folkeskole har konkrete erfaringer med problemsituationer, hvor funktionsbegrebet kan siges at være implicit tilstede og på den anden side i gymnasiet præsenteres for en matematisk definition af funktionsbegrebet. Det er veldokumenteret, at overgangen fra en procedurel beherskelse af f.eks. beregning og tegning af funktioner til en strukturel forståelse er en kognitivt krævende proces, der for de fleste elever tager lang tid og forudsætter systematisk sammenkædning mellem konkrete erfaringer med funktioner og disse funktioners matematiske egenskaber (Kieran, 1992, s. 413), (Tall, 1992, s.497-501).

Det kan derfor ikke undre at mange elever i gymnasiets matematikundervisning har store vanskeligheder med at tilegne sig afgørende begrebsmæssige sammenhænge, der involverer funktionsbegrebet. Begrænsningerne i elevernes begrebsforståelse viser sig bl.a. ved: at færdigheder som ligningsløsning og graftegning ofte kun kan bringes i anvendelse i situationer, der svarer nøje til de opgaver, eleverne har arbejdet rutinemæssigt med; men f.eks. ikke når der arbejdes med undersøgelse af sammenhængen mellem spænding, strømstyrke og modstand (Ohms lov) i fysikundervisningen; at der er problemer med at anvende forskellige repræsentationsformer for simple funktioner; at eleverne har vanskeligt ved få mening med begreber, der bygger oven på funktionsbegrebet, f.eks. differentialkvotient, den afledte funktion, stamfunktion og differentialligning (Undervisningsministeriet, 1994&95). I de seneste års offentlige debat om matematikundervisningen i Danmark er sådanne forståelsesvanskeligheder fra gymnasiets side ofte blevet forklaret med henvisning til, at eleverne i folkeskolen ikke har tilegnet sig de nødvendige fundamentale begrebsdannelser og regnefærdigheder.

Hermed leveres "Sorteper" nedad i uddannalsessystemet uden, at der bliver taget hul på en didaktisk refleksion over problemernes karakter og dets mulige årsager. For mig at se er problemerne omkring funktionsbegrebet et klart eksempel på, hvordan principielle vanskeligheder ved tilegnelsen af matematiske begreber viser sig konkret ved overgangen mellem to skoleformer. En forskningsmæssig undersøgelse af problemerne i forbindelse med elevernes tilegnelse af funktionsbegrebet kan i denne sammenhæng måske bidrage til et mere hensigtsmæssigt grundlag for udviklingen af matematikundervisningens praksis både i folkeskolen og gymnasiet.

2. En undersøgelse af 9. klasse elevers begrebsforståelse.

I efteråret 1995 var jeg vejleder på et projekt på den naturvidenskabelige basisuddannelse ved Roskilde Universitetscenter om forståelse af centrale begreber og begrebssammenhænge omkring funktionsbegrebet hos eleverne i en 9. klasse [2]. Som en del af dette projekt planlagde og gennemførte projektgruppen en kvalitativ undersøgelse af elevernes forståelse af begreberne variabel, ligning, graf og funktion. I denne artikel går jeg videre og analyserer en afgrænset del af empirien fra denne undersøgelse for dels at karakterisere nogle vanskeligheder ved tilegnelsen af funktionsbegrebet som et teoretisk matematisk begreb, dels at afdække nogle interessante forhold ved begrebstilegnelsen hos de enkelte elever.

2.1. Undersøgelsens metode

Undersøgelsen blev udført i samarbejde med en matematiklærer og en 9. klasse, der velvilligt stillede sig til rådighed. Som udgangspunkt for undersøgelsen udformede gruppen et opgavesæt, som alle 22 elever besvarede individuelt i løbet af ca. 1½ time [3]. Grundlaget for udformningen af opgaverne var tre forskellige kriterier for kvalitet ved tilegnelsen af teoretiske begreber, nemlig: (1) Det er en kvalitet ved tilegnelsen af et teoretisk begreb, at det for den enkelte bliver indlejret i en kognitiv struktur, der omfatter et sammenhængende og konsistent netværk af relationer til andre tidligere tilegnede begreber. Sættet rummer derfor opgaver, der kan udfordre eleverne til at udtrykke sådanne begrebsmæssige sammenhænge. (2) Det er en kvalitet, hvis begrebskonstruktionen er robust eller måske ligefrem invariant overfor skift mellem forskellige repræsentationformer. En funktion kan f.eks. være givet ved en ligning med tilhørerende definitionsmængde, en tabel, en graf eller en sammenhæng formuleret i et naturligt sprog. Schwarz & Dreyfus (p. 260 ,1995) fremhæver netop muligheden for at arbejde med forskellige repræsentationsformer som en vigtig kilde til og et afgørende kriterium for begrebstilegnelsen. Derfor indeholder opgavesættet en række opgaver, hvor eleverne skal arbejde med sammenhænge mellem ligninger, tabeller, grafer og sproglig beskrivelse af forskellige funktioner. (3) Det er en kvalitet ved begrebsdannelsen, at begreberne bygger på/kan bringes i anvendelse i forskellige kontekster. Boaler (1993, p.16) fremhæver, at eleverne i høj grad inddrager konteksten i deres forsøg på at få mening med en given opgave og at elevernes anvendelse af matematiske begreber og metoder er stærkt afhængig af deres personlige fortolkning af den kontekst opgaven er formuleret i. Derfor omfatter sættet nogle opgaver, der beskriver forskellige kontekster, hvor begreberne kan anvendes. Gruppens arbejde med udformningen af opgavesættet blev støttet dels af litteraturstudier, dels af diskussioner med læreren og deres vejleder. Læreren vurderede, at næsten alle elever i klassen havde forudsætninger for at arbejde med opgaverne i sættet.

På baggrund af besvarelserne dannende gruppen sig et første indtryk af elevernes forskellige forståelse af begreber og begrebssammenhænge. Elevernes opgavebesvarelse blev herefter brugt som grundlag for udvælgelse af seks elever til et kvalitativt interview. Kriterierne for denne udvælgelse var: (1) at besvarelsen rummede interessante forhold, f.eks. tilsyneladende modsætninger inden for besvarelsen af enkelte opgaver eller mellem besvarelserne af opgaverne. (2) at der i besvarelsen var spor af en sammenhængende eller systematisk forståelse, der ikke er i overensstemmelsen med den objektive betydning af de matematiske begreber. (3) at besvarelsen rummede momenter, der var enestående i forhold til klassen i øvrigt. (4) at gruppen nogenlunde afspejlede den øvrige klasse med hensyn til andelen af opgaver, der var korrekt besvaret.

På baggrund af opgavebesvarelserne lavede gruppen en interviewguide til hver af de seks udvalgte elever, der skulle interviewes. Eleverne blev interviewet enkeltvis af to eller tre studerende under hyggelige omstændigheder (kage og sodavand) mindre end en uge efter besvarelsen af opgavesættet. De studerende havde ikke på forhånd erfaringer med det kvalitative interview som metode, men de støttede sig til litteraturen og til meget grundige og konkrete diskussioner i gruppen forud for interviewundersøgelsen. Interviewene blev båndet og udskrevet til efterfølgende analyse.

Om klassen skal det oplyses, at den af læreren blev vurderet som en gennemsnits klasse hvad angår interesse for og præstationer i matematik. Klassen, der brugte *Matema* (Bollerslev et al., 1976-94) som lærebog, havde i 8. og i starten af 9. klasse arbejdet med funktioner - specielt lineære funktioner, men funktionsbegrebet havde ikke været systematisk behandlet. Undersøgelsen blev gennemført i oktober måned og klassen skulle arbejde videre med funktioner og deres anvendelser i et par måneder. Undersøgelsen kan altså ikke bruges til at vurdere elevernes udbytte af undervisningen omkring funktionsbegrebet. Fokus for undersøgelsen og for nærværende analyse er netop også elevernes aktuelle læreproces. Om klassens matematiklærer skal det kort nævnes, at han er uddannet med liniefag i matematik og har mange års erfaring med matematikundervisning på folkeskolens ældste klassetrin.

3. "y=x+5", hvad er meningen?

I dette afsnit vil jeg analysere den lille del af det empiriske materiale fra undersøgelsen, der vedrører de skriftlige besvarelser, der knytter sig til nedenstående opgave fra opgavesættet. Efterfølgende uddybes analysen af to besvarelser under inddragelse af interviewet med de pågældende elever. Opgaven, som var nr. 3 i sættet, havde følgende ordlyd:

y = x + 5
Hvad kan du sige om x i forhold til y?

Formuleringen lægger op til, at eleverne skal forsøge at give en sproglig formulering af den sammenhæng ligningen beskriver. Det er ikke tilfældigt og det gør formentlig opgaven sværere, at der står *x i forhold til y* og ikke omvendt. Hvis eleven ser ligningen som udtryk for en funktion, består opgaven i at give en sproglig beskrivelse af en funktion. For at kunne læse ligningen som en funktion er det nødvendigt at opfatte x og y som variable. Der er imidlertid ikke nogen oplysninger om, hvilken grundmængde x og y skal tilhøre. I denne forstand kan man sige, at opgaven kræver, at eleven selv foretager en fortolkning. På den anden side benytter opgaven en notationsform, der har en standardfortolkning i skolens matematikundervisning. Også den sproglige formulering af spørgsmålet kræver, at eleven foretager en fortolkning. Er der tale om sammenhørende x- og y-værdier, der opfylder ligningen? og hvad skal man forstå ved *x i forhold til y*?

20 elever svarede på denne opgave. Analysen af disse har afdækket fire 4 kategorier af forskellige besvarelser. I det følgende er de fire kategorier beskrevet og fyldigt illustreret med gengivelse af karakteristiske besvarelser.

Type (a): Besvarelser, der angiver at x er (5) mindre end y.
Denne kategori, der omfatter seks besvarelser, indeholder det matematisk set oplagte svar på spørgsmålet, men også i denne kategori kommer der forskellige aspekter ved elevernes tænkning frem i besvarelserne.

(1) x er 5 mindre end y.

En oplagt svarmulighed. Svaret gives i en sproglig formulering, der svarer nøje til spørgsmålets formulering. x står således først i begge sætninger. Det fremgår ikke af svaret om, eleven tænker på x og y som variable eller som bestemte ikke kendte tal.

(2) y er altid 5 større end x.

Set i forhold til spørgsmålets formulering er der i dette svar byttet om på x og y. Brugen af ordet "altid" antyder, at eleven opfatter x og y som variable.

(3) x er mindre end y, den er 5 mindre end y.

Besvarelsen tyder på, at eleven først læser den mening ind i ligningen, at x er mindre end y, fordi der i ligningen bliver lagt noget til x. I anden omgang konstaterer eleven, at dette noget er 5, hvorfor x må være 5 mindre end y.

Type (b): Besvarelser, der fortolker ligningen uden at svare på spørgsmålet.
Denne kategori dækker over fire besvarelser, der er meget forskellige og som derfor alle er gengivet.

(4) Jeg går ud fra at x egentlig bare er en del af y som jo er resultatet.

En interessant sproglig formulering, der tyder på at eleven læser mening ind i ligningen ved at fortolke den som et regnestykke. Eleven tænker muligvis på x og y som positive hele tal. Fortolkningen har i hvert fald sine begrænsninger, -2 kan vanskeligt opfattes som en del af 3. Svaret tyder ikke på, at eleven opfatter x og y som variable. En mulighed er dog, at formuleringen af spørgsmålet har forledt eleven til at finde på en original fortolkning, der kunne formuleres sprogligt.

(5) Hvis y=2 og x=2 bliver y=7, da x+5 (2+5=7).

Eleven prøver at få mening med ligningen og spørgsmålet ved at vælge en talværdi til y. At x får den samme værdi er næppe tilfældigt. En mulig fortolkning er, at eleven læser ligningen som y=x (+5). Sådan at udgangspunktet er y=x, hvorefter der bliver lagt 5 til x, men lighedstegnet gælder stadigvæk, så derfor bliver y=7. Derfor oplever eleven heller ingen modstrid mellem antagelsen y=2 og resultatet y=7. En sådan opfattelse kan muligvis understøttes af erfaringer med brug af lommeregner. Når man bruger en lommeregner kan "=" opleves som en operator - der udføres jo en operation, når man trykker på "="-tasten. Det forhold, at eleven ikke svarer på spørgsmålet, kan måske tolkes som en gryende erkendelse af modstriden i svaret - er x og y lige store eller er y 5 større?

(6) y = x+5 = en graf
I stedet for bogstavet y, må jeg selv sætte et tal ind hvorefter jeg så kan beregne x.

y	2	4	6	<- værdier jeg selv har valgt
x+5	7	9	11	<- regnet ud, ud fra y værdier sat ind.

Eleven svarer ikke direkte på spørgsmålet, men fortolker i stedet ligningen. Dette kan ses som elevens forsøg på at få mening med opgaven. Ligninger af typen y=x+5 plejer at optræde i opgaver, hvor man skal tegne grafen for den tilhørende funktion og dette gøres ved at lave et *sildeben* (en tabel) over sammenhørende x- og y-værdier, der kan afsættes som punkter på grafen. Det er muligvis derfor eleven laver et sildeben. Eleven opfatter helt klart x og y som variable og kan altså fortolke ligningen som en forskrift for en funktion, der har en graf eller som for eleven måske er en graf. Det er interessant, at eleven åbenbart også ved, at denne fortolkning kræver, at man vælger en uafhængig variabel, hvis variation man selv kan/skal bestemme. Eleven vælger y som uafhængig variabel - måske udtryk for, at eleven har erkendt, at der faktisk er frit valg - men kan ikke fastholde dette valg ved beregningen af funktionstabellen, hvor det er x, der er uafhængig variabel, selvom der står y i tabellen.

(7) x og y er to tal vi ikke kender dog er de ikke det samme, både x og y kan være både positive og negative tal.

Her giver eleven en fortolkning af to af de symbolerne, der indgår i ligningen, nemlig x og y. Disse fortolkes som værende to forskellige bestemte, men ikke kendte tal. Besvarelsen tyder ikke på, at eleven fortolker x og y som variable. Bemærkningen "dog er de ikke det samme" tolker jeg på den måde, at ligningen giver en vis mening for eleven.

Type (c): Besvarelser, der angiver at x er 5 større end y.
Kategorien omfatter 7 besvarelser. Jeg har fundet disse besvarelser meget interessante, bl.a. fordi de ofte - set ud fra et matematisk synspunkt - rummer selvmodsigelser. Netop dette forhold gør dem imidlertid også vanskelige at analysere. Jeg understreger derfor, at de følgende analyser er udtryk for, hvad jeg anser for at være de mest sandsynlige fortolkninger af elevernes besvarelser.

(8) x er altid 5 større end y.
Hvis man tegner en graf vil linien gå igennem +5.

Umiddelbart kunne man tro, at der her er tale om, at eleven blot er kommet til at bytte om på x og y i svarsætningen. Det viser sig imidlertid, at et svar af denne type er det hyppigst forekommende, hvilket efter min opfattelse kræver en anden fortolkning. En mulighed er, at eleven opfatter x+5 som udtryk for at x vokser med 5. Denne fortolkning uddybes i en nærmere analyse af interviewet med denne elev i afsnit 5.1. At *altid* indgår i svarsætningen kan tages som udtryk for, at eleven opfatter x og y som variable, der kan have mange forskellige værdier. Den sidste sætning viser, at eleven forbinder begrebet graf med ligningen. Det tyder på, at eleven kan læse ligningen som forskrift for en funktion. Eleven ved, at grafen for denne funktion er en linie og at "+5" har betydning for liniens beliggenhed i et koordinatsystem. Udtrykket "gå igennem +5" er dog noget upræcis, måske har eleven blot glemt at skrive "på y-aksen". Hvis det er tilfældet, kan der siges at bestå en modstrid mellem den sproglige formulering af ligningen og den grafiske repræsentation af ligningen, som eleven åbenbart kan forestille sig.

(9)

x	0	1	2
y	5	6	7

x er altid 5 større end y.

Svarsætningen er identisk med den foregående. Eleven har lavet en korrekt tabel over sammenhørende x og y værdier. Også her anvendes standardteknikken ved tegning af grafen for en funktion. Det interessante er, at eleven ikke opdager modstriden mellem tabellen og den sproglig formulering. En mulig tolkning er, at det er elevens personlige mening med ligningen, der er udtrykt i den sproglige formulering og at denne opleves som værende af en anden ikke-matematisk karakter. Derfor sammenlignes svarsætningen ikke med det tabellen udtrykker. I afsnit 5.2 bliver besvarelsen nærmere analyseret under inddragelse af interviewet med den pågældende elev.

(10) x er altid 5 et eller andet højere, større eller flere end y.
Eller x er altid = y+5

Her har vi igen en elev, der opfatter x som størst, formentlig fordi eleven opfatter ligningen, som om det er x der øges med 5. Formuleringen af den første sætning tyder på, at en variabel for eleven nødvendigvis må have en enhed - ganske vist en almen enhed. Dette opfatter jeg som et interessant trin i denne elevs tilegnelse af variabelbegrebet. Det mest bemærkelsesværdige er dog den sidste sætning, som jeg opfatter som elevens egen fortolkning af svaret. Her skriver eleven næsten ligningen x=y+5, men dette opleves åbenbart ikke som værende i modstrid med ligningen y=x+5. Også inden for elevens forståelsesramme er der tilsyneladende en modstrid i svaret. Ligningen x=y+5 skulle jo give anledning til det modsatte svar jf. den fortolkning af y=x+5, der førte eleven til at formulere den første svarsætning. Men der er ingen spor af oplevet konflikt i elevens svar - måske bort set fra, at der netop ikke står x=y+5.

(11)

y	0	1	2	3	4	5
x	5	6	7	8	9	10

x er hele tiden 5 større end y. x kender man, men y skal man regne ud hvad er.

En mulig fortolkning af denne besvarelse er, at eleven ved en fejl har byttet om på x og y symbolerne i tabellen og derefter har kopieret denne fejl i den sproglige beskrivelse af tabellen. En anden mulighed er, at den sidste sætning er gengivelse af noget læreren har sagt tit og ofte, men som ingen mening har for eleven. Hvis det er tilfældet kan også denne besvarelse forklares ved, at eleven opfatter ligningen som y=x hvorefter x bliver forøget med 5.

(12)

x	1	2	3	4	5	6 ... 12
y	6	7	8	9	10	11... 17

x vil være 5 større end y (1+5=6). Fælles! Mellem 5 og 7 = 2 Mellem 10 og 12=2 Mellem 7 og 10=3 Mellem 12 og 15=3.

Denne elev har lavet en korrekt tabel over sammenhørende x- og y-værdier, der opfylder ligningen. I tilsyneladende åbenlys modstrid med denne tabel konkluderer eleven, at x vil være 5 større y. En mulig fortolkning kan være, at eleven mener, at eftersom man skal lægge 5 til tallene i den øverste række for at få den nederste række, må man gå 5 pladser længere frem i x-rækken for at finde en x-værdi, der er ligeså stor som en given y-værdi. Den sidste sætning i besvarelsen kan jeg ikke få nogen mening ud af.

(13) x vil altid være 5 tal højere end y

Analyse af besvarelsen (13) bringer ikke afgørende nye momenter frem for denne type besvarelser. Men for at fremdrage yderligere en facet af de mulige forståelsesformer, der kan ligge bag type (c) besvarelserne vil jeg nævne, at besvarelse (13) kan bygge på en forestilling om, at y og x repræsentere hver sin side af ligningen. Når man gør balancen mellem x og y siden af ligningen op, kan man se, at der står +5 på x's side af lighedstegnet. Altså er x-siden 5 større end y-siden.

Type (D): Besvarelser, der hverken fortolker ligningen eller svarer på spørgsmålet

Denne kategori dækker over tre besvarelser. Sammen med to blanke besvarelser er de et udtryk for at 5 ud af 22 elever ikke er i stand til at danne sig en mening med opgaven, som de kan udtrykke i et skriftlig svar. Dette kan have mange meget forskellige årsager og kan ikke analyseres yderligere på det foreliggende grundlag.

(14) x kan blive til 5x og det kan y ikke, fordi der er "lig med" imellem.

(15) Aner det virkeligt ikke!!! For man ved jo ikke hvad x er men heller ikke y!

4. Samlet analyse af besvarelserne.

Overordnet er analysen af besvarelserne en dokumentation af, at eleverne ikke nødvendigvis bruger eller udvikler en forståelse af de matematiske begreber, der indgår i deres aktiviteter, som er i overensstemmelse med begrebernes objektiverede matematiske betydning. Elevernes aktiviteter får først og fremmest mening gennem elevernes individuelle mentale modeller af de indgående matematiske begreber og fra elevernes fortolkning af situationen i øvrigt (Tall, 1992, p. 496). De store forskelle i elevernes besvarelser tyder på, at sådanne individuelle mentale modeller udvikles under kraftig påvirkning af en forforståelse og erfaringsdannelse, der ligger forud for den aktuelle matematikundervisning.

Foruden de store individuelle forskelle er det meget interessant, at besvarelserne fra 7 ud af 22 elever indeholder et udsagn, om at x er 5 større end y.

For det første viser resultaterne, at det åbenbart er kognitivt vanskeligt for mange elever, at læse ligningen som en fastlæggelse af en størrelsesrelation mellem to variable størrelser og at give denne størrelsesrelation en sproglig formulering. På linie hermed anfører MacGregor & Stacey (1993, s.229) følgende som en af konklusionerne på en undersøgelse af, hvilke mentale modeller der ligge bag elevernes formulering af simple lineære ligninger.

> *Students should be made aware that some relationships (such as "eight more than") are easy to express in natural language and easy to comprehend but must be paraphrased, reorganized, or reinterpreted before they can be expressed mathematically.*

De fleste af type (c) besvarelserne indeholder en eller anden form for logisk selvmodsigelse. Forstået på den måde, at eleverne tolker symbolerne og deres egne handlinger med disse symboler på en modsætningsfyldt måde i deres besvarelse. Det er velkendt, at der i læreprocessen hos den enkelte elev kan bestå modsætningsfyldte fortolkninger af egne handlinger og erfaringer. Sådanne modsætninger skaber imidlertid ikke nødvendigvis kognitive konflikter hos eleven. David Tall har i flere arbejder beskæftiget sig med dette forhold og har indført begrebet *concept image* til beskrivelsen af både den enkelte elevs begrebsbillede, der udvikles gennem læreprocessen og af det totale billede af begrebet:

> *We shall use the term concept image to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes ... As the concept image develops it need not be coherent at all times ... We will refer to the portion of the concept image which is activated at a particular time the evoked concept image. At different times, seemingly conflicting images may be evoked. Only when conflicting aspects are evoked simultaneously need there be any actual sense of conflict or confusion.* (Tall & Vinner, 1981, p. 152)

Besvarelse 10 er en klar illustration af dette forhold. Eleven giver en sproglig fortolkning af ligningen y=x+5 "*x er altid 5 et eller andet højere...*" og denne fortolkning giver eleven en symbolsk fremstilling "*x er altid = y+5*", men eleven oplever tilsyneladende ingen kognitiv konflikt. Elevens aktive begrebsbillede omfatter fortolkning af y=x+5 som forskrift for en operation, der skal udføres på et tal x for at opnå et andet tal y, men ikke en fortolkning af y=x+5 som en ligning, der kun er opfyldt for visse par af værdier af de to variable x og y.

Det forhold, at der hos den enkelte elev, kan bestå ikke erkendte modsætninger i begrebstilegnelsen, ser ud til at være et grundvilkår for tilegnelsen af matematiske begreber. Tilegnelsen af matematiske begreber, der er indlejret i et netværk af relationer til andre matematiske begreber, kræver at den lærende under tilegnelsesprocessen løbende tilpasser og ændrer allerede etablerede kognitive sammenhænge. Sådanne læreprocesser er imidlertid ofte så intellektuelt og psykologisk krævende, at den kognitive konstruktion af nye begrebssammenhænge kun foregår delvist og med store tidsmæssige forsinkelser.

Der er svært didaktisk, at imødegå disse erkendelsesteoretiske vanskeligheder ved tilegnelsen af matematik. På den ene side fremtræder matematiske begreber ofte i symbolske repræsentationer, der foregiver at have en eksakt objektiveret matematisk betydning. På den anden side får matematiske begreber kun mening for den enkelte gennem begrebernes konkrete anvendelser i forskellige sammenhænge og gennem deres konkrete relationer til andre begreber. Tilegnelsen af matematiske begreber er baseret på læreprocesser, der er forankret til konkrete kontekster. Sådanne personlige og sociale meningstilskrivninger spiller i øvrigt også en vigtig rolle for objektiveringen og spredningen af nye matematiske begreber i en forskningsmæssig sammenhæng. Begrebernes symbolske repræsentation, der ofte savner en tilhørende sprogliggørelse bærer imidlertid ikke denne kontekstbundethed med sig. I en læreproces vil symbolerne for den lærende derfor ofte henvise til andre konkrete erfaringer med de pågældende symboler og ikke til objektive betydninger af de bagved liggende begreber. Manglende erkendelse af dette forhold kan føre til den didaktiske fejlslutning, at det er de matematiske begreber og deres objektive betydninger, eleverne arbejder med i de aktiviteter, der tilbydes i undervisningen.

I overensstemmelse hermed har flere undersøgelser vist, at elever i høj grad knytter deres erfaring og efterfølgende begrebsdannelse til den kontekst de arbejder i - herunder de repræsentationer og konkrete funktioner, der indgår i deres virksomhed (Vinner & Dreyfus, 1989). Dette betyder bl.a., at begrebstilegnelse ikke kan bedømmes alene ud fra hvilke færdigheder eleverne behersker i bestemte standard opgavekontekster.

Den aktuelle undersøgelse rummer en meget klar dokumentation af, at dette i hvert fald gælder de syv elever, der havde type (c) besvarelser. Seks af disse elever besvarede senere i opgavesættet del A i følgende opgave 8 helt korrekt:

> Tegn graferne for de funktioner, der er givet ved:
> A) y=2x+3
> B) x=4y+8

Den sidste af de syv besvarede ikke denne opgave, men besvarede følgende opgave 2 korrekt:

> Tegn grafen for den funktion, der er givet ved ligningen
> 28y - x = 26y + 3x,

Dette viser meget klart, at beherskelsen af den færdighed at kunne tegne en ret linie ud fra en funktionsforskrift givet ved en ligning ikke nødvendigvis bygger på en matematisk sund forståelse af begreberne variabel, ligning og funktion. Som en konsekvens heraf kan man tvivle på, om træning af instrumentale færdigheder til beregning af og tegning af grafer for funktioner er en hensigtsmæssig aktivitet for de formentlig mange elever i 8. og 9. klasse, for hvem disse matematiske begreber stadig er meget uklare. Sådanne aktiviteter tænkes ofte at tilgodese de svage elever, men i realiteten er der risiko for at de bidrager til fasthold en svag begrebsforståelse. Hvis matematikundervisningen skal støtte elevernes begrebstilegnelse er det efter min opfattelse vigtigt, at der lægges vægt på aktiviteter, hvor eleverne har mulighed for gradvist at skabe mening med symbolske og grafiske repræsentationer ved at bruge dem i konkrete problemsituationer. Og at elevernes erfaringer fra sådanne aktiviteter bearbejdes systematisk med henblik på at tydeliggøre relationerne til de matematiske begreber.

I overensstemmelse hermed resumerer Tall (1992, p. 501) resultaterne af sin forskning vedrørende funktionsbegrebet på følgende måde:

> *The idea of function as a process may prove to be a suitable cognitive root for the formal concept, but along the line of cognitive development there are obstacles to be overcome, including the encapsulation of the process as a single concept and the relating of this concept to its many and varied alternative representations. It remains a large and complex schema of ideas requiring a broad range of experience to grasp in any generality.*

5. Elevernes individuelle mentale modeller

I dette afsnit vil jeg nærmere analysere to elevers begrebsforståelse som den fremtræder i deres opgavebesvarelser og i de efterfølgende interviews. Det drejer sig om eleverne med henholdsvis besvarelse nummer 8 og 9.

5.1 Uddrag og analyse af interview med elev nr. 8

Den skriftlige besvarelse:

x er altid 5 større end y.
Hvis man tegner en graf vil linien gå igennem +5.

(1) Sp1: ..Du skriver "x er altid 5 større end y". Er det x der er større end y, eller er det det her, der er større end y? (peger på x+5). Hvad tænkte du da du skrev det her?
Elev: Det her produkt er 5 større end y (peger på x+5), men det er det jo ikke. Man kan godt flytte 5'eren over på den anden side, kom jeg til at tænke på ... men så ville det jo ikke være nogen linie mere - eller den samme linie.
(2) Sp1: Hvorfor ikke?
Elev: Hvis du tegner en linie ud fra den her (y=x+5), så vil den skære i 5 på x-aksen, men hvis man flytter 5 herover (x=y-5), så vil den skære i 5 på y-aksen. Da jeg skrev det der (besvarelsen af opgave 3), så mente jeg, at hvis man tegner en streg, så vil 1 gå op til 5 og 2 vil gå op til 15 osv. osv., når man har et tal, så skal man altid lægge 5 til.
(3) Sp1: Skal vi lige prøve at fokusere på det her? Hvis du siger det er det her, der er 5 større ikke? (peger på x+5). Hvad hvis vi ser på x og y og kun de to ting?
Elev: Der er det det samme. Hvis x er 1, så er y også 1
(4) Sp1: Hvordan kan du se det?
Elev: Det kan jeg, fordi der står kun en værdi på hver side og det er jo variable begge to og de skal jo være lige store. Hvis man sætter den ene værdi til noget f.eks. 5, så skal den anden også være det.
(5) Sp2: Hvad betyder så det 5-tal, der står her (peger på y=x+5)?
Elev: Hvis vi nu siger, at y er 1, så er x også 1 og så lægger man så 5 til x.
(6) Sp1: Ja. Det du mener er: Hvis der ikke står "+5", så skal x og y være lige store, ikke?
Elev: Ja.
(7) Sp1: Okay. Nu *står* der "+5". Hvad kan du så sige om dem?
Elev: Så skal... som jeg har skrevet: x'erne skal være 5 større end y.
(8) Sp3: Hvis du skal tegne den, kan du så forestille dig, hvordan grafen ville komme til at se ud?

Elev: Ja, det ville bare være en linie, der ville gå igennem 5 på x-aksen.

(9) Sp3: Okay. Tror du, at du ville kunne beskrive, hvad x var ved hjælp af de to andre -ikke ved at sætte tal ind, men udtrykke x?

Elev: Hvis man tog 5-tallet væk, eller skal det stadigvæk være der?

(10) Sp3: De skal alle tre stadigvæk være der. Tror du, at du kunne udtrykke x ved hjælp af de to andre? Her er y udtrykt (peger på y=x+5).

Elev: Det tror jeg. Jeg kunne flytte 5-tallet over, og så ville x'et pludseligt være 5 mindre end y. Hvis det er det I mener?

(11) Sp2: Ja. Her kan man regne ud, hvad y det er (peger på y=x+5). Hvad så hvis man havde y og skulle regne x ud?

Elev: Hvis der nu stod y+5=x ikke? Er det det, I mener?

(12) Sp1: Jeg ville mene..., hvis der stod x er lig med et eller andet, ikke. Der siger du: så vil x pludselig være mindre end y og nu er det større end?

Elev: Mmmh (tænkepause) - ja!

(13) Sp1: Det vil sige, at det ikke er ligegyldigt, om man flytter rundt på tingene? Eller hvad? Må man gerne flytte rundt på en ligning? Vil det så ændre...

Elev: Nu kom jeg lige pludselig til at tænke på, at det... x ville jo være størst lige meget hvad, for hvis man nu flyttede 5 tallet over, så ville der stå -5 (skriver x=y-5).

(14) Sp1: Ja?

Elev: Så x ville egentlig være størst hele tiden.

Allerede i det første svar udtrykker eleven en interessant personlig forestilling. Eleven er åbenbart helt klar over, at en første grads ligning af formen y=x+b giver anledning til en ret linie. Samtidig mener eleven, at gyldige algebraiske manipulationer med ligningen vil forandre den tilhørende linie. Svar (2) understøtter denne fortolkning og viser samtidig, at eleven har en klar, men forkert opfattelse af betydningen af ligningens sidste led "+5" for liniens beliggenhed.

Spørgsmål (3)-(6) med tilhørende svar åbner for to alternative fortolkninger. Enten opfatter eleven spørgsmål (3) på den måde, at det nu drejer sig om ligningen y=x. Det er denne fortolkning intervieweren giver udtryk for i spørgsmål (6). Eller også mener eleven, at de to variable x og y i ligningen y=x+5 faktisk skal have samme værdi. I lyset af svar (5) er denne fortolkning bestemt også mulige. To andre steder i interviewet - i tilknytning til andre opgaver -giver denne elev faktisk udtryk for samme opfattelse. Man kan forestille sig, at en sådan opfattelse kan udvikles som en overgeneralisering af hovedreglen fra de mange års arbejde med ligningsløsning i matematikundervisningen nemlig: *Man skal altid gøre det samme på begge sider af lighedstegnet.*

Det mest interessante i denne sammenhæng er dog, at en sådan opfattelse kan være til stede hos den enkelte elev samtidig med, at eleven behersker en færdighed, der gør det muligt at tegne en linie, der er givet ved en ligning, jf. opgave 8, side 13. En mulig forklaring er, at nogle elever ensidigt fortolker udtrykket y=x+5 som forskrift for en funktion(smaskine), der *ændrer* de tal man putter ind, i dette tilfælde forøger dem med 5. x er det tal man putter ind og som forandres af maskinen og efter forandringen kaldes resultatet også y. I denne fortolkning er det naturligt at lade x og y have samme startværdi - de er jo så at sige lige ubekendte til at starte med og de er jo også ens, når de kommer ud af funktionsmaskinen. Denne fortolkning styrkes af elevens besvarelse af en anden opgave fra opgavesættet. Opgaven lød sådan:

Opg.4:	x	1	2	5	7	10
	y	4	5	8	10	13

Hvad kan du sige om x-værdierne i forhold til y-værdierne?

Svar: y-værdierne er 3 større end x-værdierne.
Fx. kunne ligningen være x=y+3

Dette svar er helt i overensstemmelse med den forståelse eleven udtrykker i interviewet. Analogien mellem en maskine som en indretning, der forarbejder de råvarer man putter i den, og en funktion kan give anledning til den forkerte opfattelse, at funktionen forandrer værdien af den uafhængige variabel. Som tidligere nævnt kan en udstrakt brug af lommeregner til for eksempel beregning af funktionstabeller også tænkes at påvirke elevernes forståelse i retning af at fokusere på den *regneproces*, der skal gennemføres for at beregne funktionsværdien for en given værdi af den uafhængige variabel. Om det er sådanne forhold, der gør sig gældende for den aktuelle elev, kan jeg naturligvis ikke udtale mig om på det foreliggende grundlag. Men en kraftig fokusering på de operationelle aspekter af funktionsbegrebet rummer i hvert fald en fare for, at elevernes forståelse af en funktion som et objekt, der kan gøres til genstand for forskellige former for matematiske undersøgelser, ikke udfordres og udvikles tilstrækkeligt.

Netop dette aspekt - at kondensere et matematisk objekt ud af en operationel viden - af begrebstilegnelse har Sfard (1991) behandlet indgående. Hun argumenterer for, at de operationelle aspekter af matematiske begreber ganske vist både historisk og i tilegnelsesprocessen ofte går forud for de strukturelle aspekter. Men hun understreger samtidig, at det sidste skridt i begrebstilegnelsesprocessen, hvor de matematiske objekter og deres strukturelle aspekter kommer i fokus, er helt nødvendig for tilegnelsen af matematik. Hun kalder denne proces for *reification* (Sfard, 1991, s.18). For mig at se er nærværende analyse af elevernes forståelse af funktionsbegrebet en klar understregning af behovet for øget opmærksomhed på dette aspekt af matematiktilegnelse.

Lad os vende tilbage til interviewet ved spørgsmål (9). Her sigter intervieweren på at udfordre elevens skriftlige svar på den oprindelige opgave. I svar (10) fastholder eleven imidlertid forestillingen om, at algebraiske manipulationer med ligningen har betydning for hvilke par af x- og y-værdier, der passer i ligningen. Og det er først gennem dialogen omkring spørgsmål (11)-(14), at eleven erkender selvmodsigelsen i denne forestilling. Som konklusion når eleven frem til, at x er størst, uanset hvordan ligningen skrives. Interviewet går desværre ikke længere i forbindelse med denne opgave.

Det principielt interessante ved denne elev er det forhold, at eleven på den ene side er i stand til at løse standardopgaver vedrørende tegning af rette linier og på den anden side har grundlæggende forkerte opfattelser af centrale begreber, der oven i købet viser sig at være sammenhængende og modstandskraftige overfor den udfordring, det er at formulere sig i et interview. Eleven oplever tilsyneladende på intet tidspunkt af interviewet tvivl om rigtigheden af det oprindelige skriftlige svar.

Det er efter min opfattelse en vigtig didaktisk pointe, at der er stor risiko for, at arbejdet med standardopgaver vedrørende den rette linies ligning vil være meningsløst for denne elev, fordi det ikke vil udfordre elevens begrebsforståelse. I en matematikundervisning med megen vægt på opgaveregning er det langt fra givet, at læreren opdager sådanne begrebsmæssige problemer og selvom læreren bliver opmærksom på enkelte elevers problemer, kræver det betydeligt fagligt, didaktisk og pædagogisk overskud at udfordre den enkelte elevs begrebsforståelse på en relevant måde. En mulighed kunne f.eks. være at bede eleven afmærke de punkter i et koordinatsystem, hvor y-koordinaten er 2 større end x-koordinaten og efterfølgende udfordre eleven til at udtrykke denne sammenhæng i en ligning (y-x=2).

5.2 Uddrag og analyse af interview med elev nr. 9
Den skriftlige besvarelse:

x 0 1 2
y 5 6 7
x er altid 5 større end y.

(1) Spl: Opgave 3. Prøv at skrive en ligning op, der hedder: y=7+x. (Eleven skriver ligningen.) Og så spørger jeg ligesom i opgave 3: Hvad kan du sige om x i forhold til y?
Elev: x er 7 større end y
(2) Spl: I opgaven siger du også, at x er 5 større end y. Hvordan kommer du frem til det?
Elev: Fordi der står +5 på højre siden, der står ikke -3 bagefter, eller sådan noget, så den må være 5 større.
(3) Spl: Hvis nu der havde stået -5 i stedet for, hvad så?
Elev: Så ville den være 5 mindre.
(4) Spl: OK, kan x være alt muligt her?
Elev: Ja fordi vi ved ikke, hvad y er.
(5) Spl: Kan du beskrive, hvad x er? Skriv det eller sig det?
Elev: Hvis man lægger x+5 sammen så giver det y.......nej, y er 5 større end x, hvis man regner det ud, fordi 2+5=7, hvis x er lig 2, plus 5, det er 7.

Også her er der altså tale om en elev, der har svaret, at x er 5 større end y (type c). Stillet overfor en ny opgave af helt samme form (y=7+x) fastholder eleven, at det er x der er størst. Af svar (2) fremgår det for mig at se, hvilken fortolkning af ligningerne, der ligger til grund for elevens svar. Efter helt samme model som vi så hos den foregående elev, fortolkes ligningen som en funktionsmaskine, der øger x'ernes værdi med henholdsvis 5 og 7 i de to ligninger. Derfor må x være større end y. Svar (3) viser at denne fortolkning fastholdes, hvis der trækkes et tal fra x på højre side af ligningen.

Svar (4) antyder, at eleven har en klar opfattelse af, at der er en afhængighed mellem x og y. Dette udnyttes i spørgsmål (5) til at efterspørge et udtryk for x. Eleven når imidlertid ikke at svare på dette spørgsmål, jf. svar (5). Ved genlæsningen af ligningen y=x+5 får den en helt ny mening for eleven, nemlig at x+5 er det samme som (har samme værdi) y. Herefter kan eleven uden videre fastslå, at det er y, der er 5 større end x. Eleven afprøver straks den nye indsigt ved at indsætte 2 for x i ligningen.

Jeg finder to interessante forhold ved dette interview. For det første understøtter det den fortolkning jeg udviklede til analyse af det foregående interview. Og styrker derved grundlaget for at søge efter mulige årsager til udvikling af en sådan forståelse hos eleverne. Jeg vil pege på brugen af funktionsmaskiner og den stærke vægt der lægges på procesaspektet ved beregning af funktionsværdier i skolens matematikundervisning som en mulig årsag. Men det skal understreges, at formålet med denne artikel er at afdække nogle fællestræk ved elevernes forståelse og ikke at søge deres mulige årsager. Hertil kræves helt andre undersøgelser.

For det andet er interviewet interessant, fordi det viser, hvad der kan være en relevant didaktisk udfordring af begrebsforståelsen hos en elev. Det der bringer eleven videre er, at eleven læser ligningen igen med henblik på at finde ud af, hvordan x kan isoleres af ligningen. Elevens læsning accentuerer modsætningen mellem den mening, som eleven i sin læsning af ligningen tilskriver "=" og elevens foregående svar. Eleven oplever kun en kort kognitiv konflikt. Næsten momentant kan den nye mening med ligningen bruges til at give et nyt svar på den oprindelige opgave. Et svar som eleven oven i købet selv kan verificere. Arcavi (1994, p.26) fremhæver netop meningsgivende læsning af symboludtryk som et vigtigt middel til læring og han inkluderer en sådan kompetence som et vigtigt element i sit begreb om *symbol sense.*

Det er naturligvis ikke muligt at give en opskrift på, hvordan man som lærer kan støtte, at sådanne situationer opstår. Men nogle nødvendige omstændigheder kan dog anføres. For det første er det naturligvis afgørende, at læreren har muligheder for - i form af tid og faglige og pædagogiske forudsætninger - og interesse i at vinde indsigt i den enkelte elevs begrebsforståelse. For det andet må læreren ud fra en sådan indsigt kunne udfordre eleverne ud fra klargjorte faglige intentioner for elevernes læring.

6. Didaktiske konsekvenser

Hvis man anerkender, at læring for den enkelte elev bygger på personlig konstruktion af kognitive strukturer, og dermed at læring har en subjektiv side, så opstår der et grundlæggende dilemma i undervisningen, når eleverne skal tilegne sig bestemte objektive - eller objektiverede - betydninger af et teoretisk begreb. Dilemmaet står mellem den personlige subjektive og den faglige objektive side af læringen (Eriksen , 1993). Betydningen af de teoretiske begreber og deres indbyrdes sammenhæng kan ikke overføres direkte til eleven, fordi eleven handler og tolker ud fra sin egen forståelse. Når det drejer sig om matematiske begreber med et net af indbyrdes relationer, er det på den anden side umådeligt naivt at tro, at eleven selv kan konstruere begreber, der svarer til de faglige objektive begreber.

Efter min opfattelse peger analysen i denne artikel på, at dette dilemma står særligt skarpt, når det drejer sig om komplicerede teoretiske begreber som variable, ligning og funktion. Analysen har vist, at der for nogle elever kan være betydelig afstand mellem på den ene side de objektive matematiske begreber, der er målet for elevernes læring, og på den anden side de begreber og begrebssammenhænge, som eleverne opbygger gennem deres matematiske aktiviteter. Eleverne kan i matematikundervisningen udvikle effektive procedurer til løsning af de opgaver, de bliver stillet overfor uden, at deres begrebsforståelse bliver udfordret. Der er derfor risiko for at de aktiviteter, der tilbydes i skolens og senere i gymnasiets matematikundervisning, for mange elevers vedkommende kun i stærkt begrænset omfang vil bidrage til udvikling af deres begrebsforståelse. Resultatet kan blive, at begreberne for nogle elever ikke bliver tilstrækkeligt afklaret til, at de kan bruges til at strukturere deres erfaringer fra arbejdet i matematikundervisningen eller fra andre sammenhænge eller som fundament for overliggende matematiske begrebsdannelser.

Som en undervisningsmæssig konsekvens af denne analyse vil jeg pege på behovet for at styrke to former for dialoger i matematikundervisningen. Dels dialoger der med udgangspunkt i den enkelte elevs forståelse søger at udfordre begrebsforståelsen hos den enkelte med henblik på at støtte tilegnelse af begrebernes objektive matematiske betydninger. Dels dialoger, hvor læreren ud fra en fælles erfaringsbaggrund søger at udvikle klassens fælles faglige viden til at omfatte de centrale betydninger af de matematiske begreber, der arbejdes med i undervisningen.

Acknowledgements: Jeg har under redigering af artiklen modtaget mange gode råd og kommentarer fra Ole Einar Torkildsen Institutt for Praktisk Pædagogikk, Universitetet i Bergen samt fra Mogens Niss og Tine Wedege IMFUFA, Roskilde Universitetscenter.

Referencer:

Andersen, K., S. Dahlin, S. Hansen, K.G. Laursen, L.L. Pedersen, S.V. Rasmussen, L. Richter (1995). *Forståelser af funktionsbegrebet -en kvalitativ undersøgelse af en 9. klasse* Projektrapport ved Nat Bas, gruppe 8, hus 13.1, efteråret 1995. Roskilde Universitetscenter.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics.*For the Learning of Mathematics*, 14, (3), 24-35.

Boaler, J., (1993). The role of contexts in mathematics classroom:Do they make mathematics more "real"?*For the Learning of Mathematics*, 13, (2), 12-17.

Bollerslev, P., V. Harbo, V. Hartz, P. Olsen, L. Ørsted Petersen & I. Trankjær, (1976-94).

Matema. System fra 1.-10. klassetrin. Gyldendal, København.

Eriksen, D. B. (1993). *Personlige og sociale sider af elevernes tilegnelse af faglig viden og kunnen i folkeskolens matematikundervisning.* MI-tekst 87, Matematisk Afdeling, Danmarks Lærerhøjskole, København.

Jessen, C., P. Møller & F. Mørk (1994). *Geometri og Funktioner.Matematik - tanke, sprog og redskab.* Nordisk Forlag, København.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. In *Handbook of research on mathematical teaching and learning.*

D.A. Grows (ed.), NCTM, Macmillan Publ. co. USA, s.390-419..

Kleiner, I. (1993). Functions: Historical and Pedagogical Aspects.*Science & Education,* 2: pp. 183-209.

Kroman Clausen, C.C., C.E. Jensen & T. Monrad (1991).*Matematiktimen*, 8. Grundbog. 2. udgave, Gjellerup & Gad.

MacGregor, M. & K. Stacey (1993): Cognitive Models UnderlyingStudents' Formulation of Simple Linear Equations. Journal for Research in Mathematics Education, vol 24, 3,217-232.

Schwarz, B. & T. Dreyfus (1995). New action upon old objects: A new ontological perspective on functions.*Educational Studies in Mathematics*, 29, 259-291.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin.*Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Tall, D., (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity, and proof.In *Handbook of research on mathematical teaching and learning.*

D.A. Grows (ed.), NCTM, Macmillan Publ. co. USA.

Tall, D. & Vinner, S., (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity.*Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Vinner, S. & T. Dreyfus, (1989). Images and definitions of the concept of function.*Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 356-366.

Undervisningsministeriet (1994) & (1995). *Skriftlig matematik i 199x.* Evalueringshæfter vedrørende de skriftlige eksamener.Udgivet af Gymnasieafdelingen, Fagkonsulenterne i matematik.

The concept of function and the conceptual understanding of Danish 9th graders

Abstract:
The students' difficulties with acquiring the concept of function as a theoretical concept with a network of relations to other concepts such as variable, equation and graph are well known both in research and in the practice of mathematics instruction. In the Danish school system these difficulties are especially conspicuous in the transition from mathematics instruction in the "folkeskole" (grade 1.-10.) to the gymnasium (upper secondary level). This article illuminates these learning difficulties by means of an investigation of the students understanding of functions in a 9. grade class. The analysis shows common features for some of the students understanding, that form epistemological obstacles for the acquisition of important concept relations for example between function and equation. Analysis of two qualitative interviews shows that the students' understanding can be both coherent and resistant to challenge without being in consistence with the objective meaning of the mathematical concepts. Some didactical implications are drawn out.

Author:
Morten Blomhøj (24.11.1959): Cand mag. fra Roskilde Universitetscenter i 1987 og Ph.D. i matematikkens didaktik fra Danmarks Lærerhøjskole i 1992. Fra 1997 Lektor i matematikkens didaktik ved IMFUFA, Roskilde Universitetscenter.

Address:
Imfufa, RUC, postbox 260, 4000 Roskilde, Danmark.
E-mail: Morten@mmf.ruc.dk

Noter:
[1] Denne vurdering bygger på en analyse af tre af de mest anvendte lærebogssystemer, nemlig: *Sigma* fra forlaget Malling Beck, *Matematiktimen* fra forlaget GAD & Grafisk og *Matema* fra forlaget Gyldendal. Samt på egne iagttagelser af matematikundervisningen på 8.-9. klassetrin i forbindelse med udviklingsarbejder og skolebesøg inden for de sidste 8 år.

[2] Projektet blev udført af syv studerende: Karen T. Andersen, Sidse Dahlin og Stine M. Hansen, Kirsten G. Laursen, Laila L. Pedersen, Stine V. Rasmussen og Lars Richter. Rapporten fra projektet: *Forståelser af Funktionsbegrebet - en kvalitativ undersøgelse af en 9.klasse* indeholder den fulde empiriske dokumentation. Rapporten (Andersen et al., 1995) kan lånes på biblioteket ved Roskilde Universitetscenter.

[3] Eleverne blev orienteret om formålet med undersøgelsen af de studerende en uge inden de fik opgavesættet og det blev understreget, at besvarelserne kunne være anonyme og at de ikke ville indgå i bedømmelsen af elevernes standpunkt. Det blev tilstræbt, at eleverne ikke følte tidspres under besvarelsen af opgavesættet og de der ønskede det fik mulighed for at arbejde videre med opgaverne i den efterfølgende matematiktime. Eleverne blev bedt om at kommentere deres besvarelser så grundigt som muligt.