Lösningsförslag Tenta 2018-08-22 Kombinatorik & geometri

1) Se kurslitteratur/föreläsningsanteckningar

2) OMTENTAMEN

OMTENA
MTEN

fembokstavsord:

- inga dubblett: välj bland 6 bokstäver $\underline{6}\cdot\underline{5}\cdot\underline{4}\cdot\underline{3}\cdot\underline{2} = 720$
- en dubblett: $\begin{cases} 4 \text{ val av dubblett} \\ \text{dubbletten placeras ut på } \frac{5\cdot 4}{2} \text{ olika sätt} \\ 3 \text{ platser kvar, 5 olika bokstäver } 5\cdot 4\cdot 3 \end{cases}$

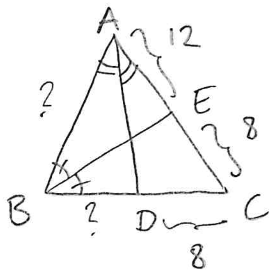
$\Rightarrow 4\cdot\frac{5\cdot 4}{2}\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 2400$

- två dubbletter: $\begin{cases} \frac{4\cdot 3}{2} \text{ val av dubbletter} \\ \text{dubbletterna placeras ut på } \frac{5\cdot 4}{2}\cdot\frac{3\cdot 2}{2} \text{ olika sätt} \\ \text{en plats kvar, 4 olika bokstäver} \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{4\cdot 3}{2}\cdot\frac{5\cdot 4}{2}\cdot\frac{3\cdot 2}{2}\cdot 4 = 720$

Sammanlagt: $720+2400+720 = 3840$ olika fembokstavsord

3)



Bisektrissatsen: $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CD|}$ & $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|CE|}$

$\Rightarrow \frac{|AB|}{20} = \frac{|BD|}{8}$ & $\frac{|AB|}{|BD|+8} = \frac{12}{8}$

$\Leftrightarrow |AB| = \frac{20}{8}|BD|$ & $|AB| = \frac{12}{8}(|BD|+8)$

$\Rightarrow \frac{20}{8}|BD| = \frac{12}{8}(|BD|+8)$

$\Leftrightarrow 8|BD| = 96$

$\Leftrightarrow |BD| = \frac{96}{8} = 12 \Rightarrow |AB| = \frac{20}{8}\cdot 12 = 30$

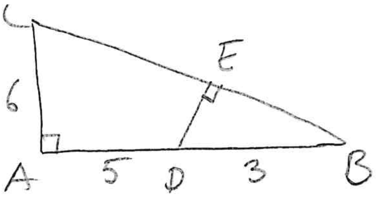
<u>Svar</u>: $|AB| = 30$ l.e. och $|BD| = 12$ l.e.

4) 3 personer, 12 karameller

a) "överhuvudtaget" $\longrightarrow$ streck i räkningen, 12 karameller, 2 streck

$\binom{14}{2} = \frac{14!}{2!\,12!} = \frac{14\cdot 13}{2} = 91$ Svar: 91 olika sätt.

b) ingen får mer än 6 karameller
Räkna ut komplementet: På hur många sätt kan vi dela ut karamellerna så att någon får minst 7 karameller? Ge 7 karameller till någon från början (3 val) och dela sedan ut övriga 5 karameller till de tre personerna (streck i räkningen)
5 karameller, 2 streck $\Rightarrow 3\cdot\binom{7}{2} = 3\cdot\frac{7\cdot 6}{2} = 63$
Antal sätt att dela ut karameller så att ingen får fler än 6 karameller blir då $91-63 = 28$
<u>Svar</u>: 28 olika sätt.

5) 

$|DE| = ?$

Pythagoras sats: $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$

$|BC|^2 = 8^2 + 6^2$

$\Rightarrow |BC| = 10$

$\angle DBE \cong \angle ABC$ & $\angle BAC \cong \angle BED$

VVV $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle EBD$

$\Rightarrow \dfrac{|DE|}{|AC|} = \dfrac{|BD|}{|BC|} \Rightarrow \dfrac{|DE|}{6} = \dfrac{3}{10} \Leftrightarrow |DE| = \dfrac{3 \cdot 6}{10} = \dfrac{9}{5}$

Svar: $|DE| = \frac{9}{5}$ l.e.

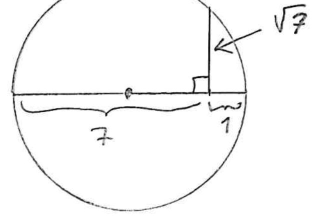
6) Stryktips: För att få 10 rätt ska vi välja 10 matcher av 13 med rätt resultat. Detta går på $\binom{13}{10}$ sätt. Sedan finns det 2 sätt att ha fel på vardera av de tre matcherna med fel resultat, dvs det finns 2^3 sätt att tippa fel på de tre matcherna med fel resultat.

Så det finns $\binom{13}{10} \cdot 2^3 = \dfrac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2288$

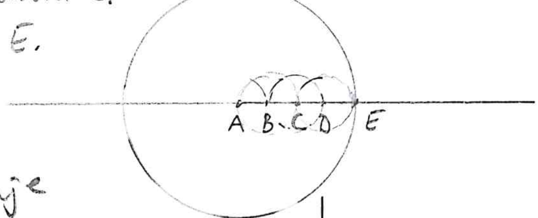
Svar: 2288 olika sätt att få exakt 10 rätt.

7) ⊢——⊣ 1 l.e. är givet

a) idé: vi vill göra följande konstruktion:

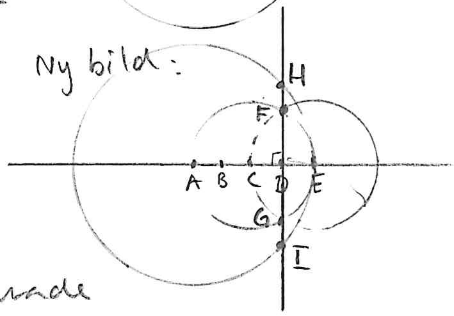


Vi måste först konstruera en cirkel med diameter 8 l.e.. Förläng sträckan AB med längd 1. Sätt passarnålen i punkt B, ställ in radien |AB| och hitta skärningspunkt C. Upprepa och hitta skärningspunkt D resp. E. Sätt passarnålen i A och ställ in radien |AE|, dra cirkeln.



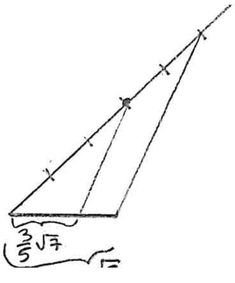
Nu måste vi konstruera en vinkelrät linje till AE i punkten D. Sätt nålen i C, ställ in radien |CE| och dra cirkeln; sätt nålen i E, ställ in radien |CE| och dra cirkeln; dessa två cirklar skär varandra i F och G. Dra linjen FG som skär den stora cirkeln i H och I. $|DH| = \sqrt{7}$ l.e.

Ny bild:

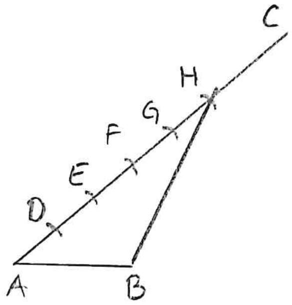


b) idé: vi utgår från den nyss konstruerade sträckan med längd $\sqrt{7}$ och konstruerar en sträcka som är $\frac{3}{5}$ av denna.

Vi vill göra följande konstruktion:

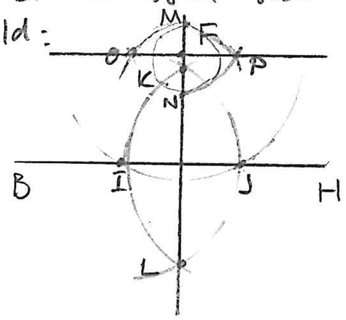


Låt AB vara sträckan med längd $\sqrt{7}$.
Dra en linje AC, sätt passarnålen i A och ställ in godtycklig radie, dra cirkeln som skär linjen i D, sätt nålen i D, ställ in radien $|AD|$, dra cirkeln som skär linjen i E. Gör på samma sätt för att konstruera F, G och H. Dra linjen genom H och B.



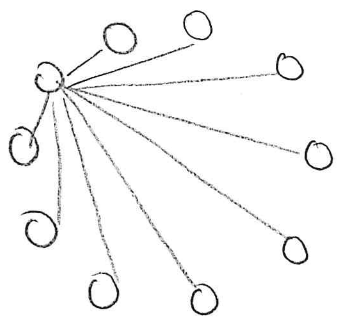
Vi ska nu konstruera en parallell linje till BH som går genom F. Vi konstruerar först en normal till BH genom F: sätt nålen i F, dra en cirkel som skär BH i I och J.
Sätt nålen i I, ställ in radien $|IJ|$, dra cirkeln. Sätt nålen i J, ställ in radien $|IJ|$, dra cirkeln.
Dessa två cirklar skär varandra i K och L. Dra linjen KL.

Ny bild:



Konstruera nu en normal till KL genom F. Sätt nålen i F, dra en cirkel som skär KL i M och N. Sätt nålen i M, ställ in radien MN, dra cirkeln. Sätt nålen i N, ställ in radien MN, dra cirkeln. Dessa två cirklar skär varandra i O och P. Dra linjen OP.
OP är parallell med BH. Om vi hade ritat allt i samma bild så hade OP och AB haft en skärningspunkt Q sådan att AQ hade haft längden $\frac{3}{5}\sqrt{7}$.

8)



Visa att minst två öar har samma antal broar, 10 öar.
Varje ö kan ha 0, 1, 2, ... eller 9 broar.
Men om någon ö har 0 broar så kan ingen ha 9 broar och om någon ö har 9 broar så kan ingen ö ha 0 broar.

Antalet broar till varje ö varierar alltså mellan 0 och 8, eller 1 och 9. Därmed finns det nio möjligheter för varje ö ("9 lådor"). Men det finns tio öar. Enligt Dirichlets lådprincip måste därför minst två öar "hamna i samma låda", dvs ha samma antal broar.