Kombinatorik och geometri – Lösningsförslag tenta 7/6 2018

1) Se kurslitteratur

2) SOLSEMESTER

SOLEMTR
S E
S E

a) 11 bokstäver: $\dfrac{11!}{3!\,3!}$

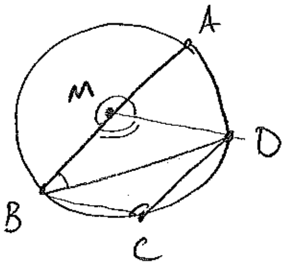
b) 3 bokstäver: Fall 1, Inga dubletter: $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

Fall 2, dubletter: SS eller EE, 3 sätt att placera dessa, 5 val av sista bokstav:
$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

Fall 3, tripletter: SSS eller EEE $\to$ 2

Sammanlagt: $210 + 30 + 2 = 242$

3)



$(\angle BCD)^\circ = 124^\circ$

Periferivinkelsatsen $\Rightarrow (\angle BMD)^\circ = 248^\circ$ ("yttre vinkeln")

$\Rightarrow (\angle BMD)^\circ = 360^\circ - 248^\circ = 112^\circ$ ("inre vinkeln")

AB diameter $\Rightarrow (\angle BMD)^\circ + (\angle AMD)^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow (\angle AMD)^\circ = 180^\circ - (\angle BMD)^\circ = 180^\circ - 112^\circ = 68^\circ$

Periferivinkelsatsen $\Rightarrow (\angle ABD)^\circ = \frac{1}{2} \cdot (\angle AMD)^\circ = \left(\frac{68}{2}\right)^\circ = 34^\circ$

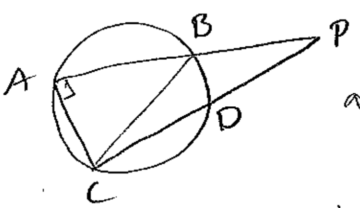
4)

3 kulor, 7 smaker. Vi kan tolka på 4 olika sätt:

- 3 olika smaker, ordning spelar roll: $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$
- 3 olika smaker, ordning spelar ingen roll: $\binom{7}{3} = \dfrac{7!}{3!\,4!} = 35$
- dubletter tillåtna, ordning spelar roll: $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$
- dubletter tillåtna, ordning spelar ingen roll:
  - Fall 1: 3 olika: $\binom{7}{3} = 35$
  - Fall 2: dublett: dublett kan väljas på 7 sätt, tredje kulan kan väljas på 6 sätt: $7 \cdot 6 = 42$
  - Fall 3: triplett: kan väljas på 7 sätt

$\Rightarrow 35 + 42 + 7 = 84$

5)



$|AB| = 15 \quad |BP| = 5 \quad |DP| = 4$

a) $|CD| = ?$ Kordasatsen $\Rightarrow |AP||BP| = |CP||DP|$ $\Rightarrow |CD| = 21$

$20 \cdot 5 = (|CD| + 4) \cdot 4$

b) $\angle CAB$ rät, Periferivinkelsatsen $\Rightarrow$ BC diameter

Pythagoras sats på triangel APC: $|CP|^2 = |AP|^2 + |AC|^2$

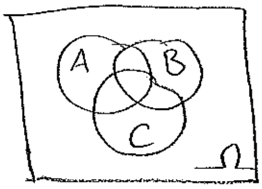
$\Rightarrow |AC| = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$

Pythagoras sats på triangel ABC: $|BC|^2 = |AB^2| + |AC|^2$

$\Rightarrow |BC| = \sqrt{15^2 + 15^2} = \sqrt{450} = 15\sqrt{2}$

6) Hur många av heltalen 1, 2, ..., 1500 är delbara med minst ett av talen 2, 3 och 5?

$\Omega = \{1, 2, \dots, 1500\}$ $\#\Omega = 1500$



Vi har delmängderna: A (delbara med 2)
B (delbara med 3)
C (delbara med 5)

Vi söker antalet element i $A \cup B \cup C$

$\frac{1500}{2} = 750 \Rightarrow \# A = 750$ $\frac{1500}{2 \cdot 3} = 250 \Rightarrow \#(A \cap B) = 250$

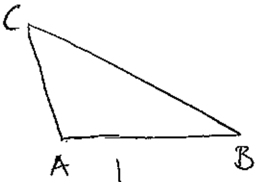
$\frac{1500}{3} = 500 \Rightarrow \# B = 500$ $\frac{1500}{2 \cdot 5} = 150 \Rightarrow \#(A \cap C) = 150$

$\frac{1500}{5} = 300 \Rightarrow \# C = 300$ $\frac{1500}{3 \cdot 5} = 100 \Rightarrow \#(B \cap C) = 100$

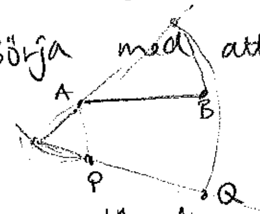
$\frac{1500}{2 \cdot 3 \cdot 5} = 50 \Rightarrow \#(A \cap B \cap C) = 50$

Inklusion / exklusion $\Rightarrow \#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - (\#(A \cap B) + \#(A \cap C) + \#(B \cap C))$
$+ \#(A \cap B \cap C) = 750 + 500 + 300 - (250 + 150 + 100) + 50 = 1100$

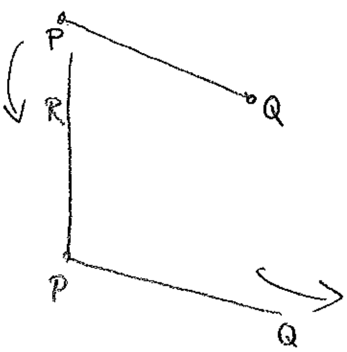
7)

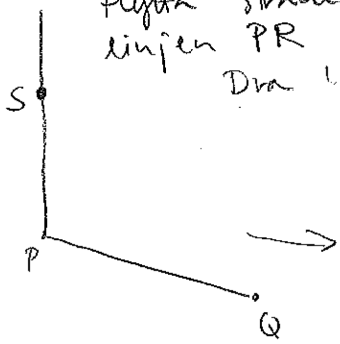


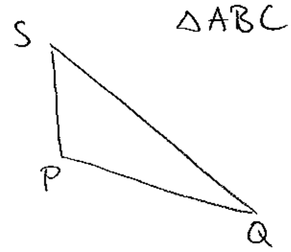
Börja med att "flytta sträckan" AB till P
(se föreläsningsanteckningar)
$AB \cong PQ$



Flytta därefter vinkel $\angle BAC$ till P
(se föreläsningsanteckningar)
$\angle BAC \cong \angle QPR$, dra linjen PR
Flytta sträckan AC till P, avsätt längs med linjen PR så att $|AC| \cong |PS|$
Dra linje från Q till S
$\triangle ABC \cong \triangle PQS$







8

Tresiffriga positiva heltal

Fall 1: 1 förekommer en gång: om 1 står i tredje position så har vi 9 val i första resp andra position, om 1 står i första eller andra position har vi åtta val i tredje position och 9 val i andra position

$\underline{1} \cdot \underline{9\text{val}} \cdot \underline{9\text{val}} + \underline{8\text{val}}\ \underline{1}\ \underline{9\text{val}} + \underline{8\text{val}}\ \underline{9\text{val}}\ \underline{1}$ $1 \cdot 9 \cdot 9 + 8 \cdot 1 \cdot 9 + 8 \cdot 9 \cdot 1 = 225$

Fall 2: 1 förekommer tre gånger: $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

Sammanlagt: $225 + 1 = 226$