Supremum och infimum

Vi skall generalisera begreppen maximum och minimum till oändliga mängder.

Om vi har en ändlig mängd $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ så betecknar vi med $\max M$ det största av talen $a_1, \ldots, a_n$ och med $\min M$ det minsta av talen $a_1, \ldots, a_n$.

När mängden inte är ändlig behöver inte något största eller minsta tal finnas.

Exempel 1. För mängden $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ gäller att $\min \mathbb{N} = 0$ men $\max \mathbb{N}$ existerar inte, det finns inget största tal i $\mathbb{N}$.

Problemet med detta exempel är att mängden $\mathbb{N}$ inte är uppåt begränsad. Att en mängd M är uppåt begränsad betyder att det finns ett tal m så att $M \subset]-\infty, m]$ eller att varje x i M är mindre än eller lika med m. Ett sådant tal m kallas en övre begränsning eller en majorant till M.

Exempel 2. Om $A = [0, 1]$ så gäller $\max A = 1$ men för mängden $B = [0, 1[$ existerar inte $\max B$, B har inget största element.

För att råda bot på detta gör vi följande

Definition 1. *Supremum* till en uppåt begränsad mängd M av reella tal är den minsta övre begränsningen till M. Vi betecknar detta supremum med $\sup M$.

För en ändlig mängd gäller $\max M = \sup M$. Om M inte är uppåt begränsad skriver man ibland att $\sup M = \infty$.

Exempel 3. Vi har $\sup[0, 1] = 1$, $\sup[0, 1[= 1$ och $\sup \mathbb{N} = \infty$. Mer intressant är att

$$\sup\{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 2\} = \sqrt{2}\ .$$

Övning 1. Visa det!

För de reeella talen gäller att varje icketom uppåt begränsad mängd M har en minsta övre begränsning. Detta kallas för supremumegenskapen eller supremumaxiomet.

Supremumaxiomet

Varje uppåt begränsad mängd M av reeella tal har ett supremum, $\sup M$.

Supremumaxiomet uttrycker att $\mathbb{R}$ är fullständigt. Supremumegenskapen kan bevisas från (16), sid. 150 i Persson-Böiers, men man kan också bevisa (16) från supremumaxiomet.

På liknade sätt definierar vi *infimum* som det största tal som är mindre än eller lika med alla tal i mängden M. Infimum är en generalisering av minimum och betecknas $\inf M$.

Med hjälp av dessa begrepp kan vi göra en mer naturlig definition av integrerbarhet och integralen av en integrerbar funktion.

Med beteckningarna i Persson-Böiers, sid. 286ff. sätter vi

$$\overline{I}(f) = \inf\{I(\Psi); \Psi \text{ en trappfunktion med } \Psi \geq f\}$$

och

$$\underline{I}(f) = \sup\{I(\Phi); \Phi \text{ en trappfunktion med } \Phi \leq f\} \ .$$

$\overline{I}(f)$ och $\underline{I}(f)$ kallas för över- respektive underintegralen till f och vi gör följande definition.

Definition 2. En begränsad funktion på ett begränsat intervall $[a, b]$ är *(Riemann)integrerbar* om $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$. Om f är integrerbar betecknas integralen av f över $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx$$

och är lika med detta gemensamma värde,

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{I}(f) = \underline{I}(f) \ .$$

Övning 2. Visa att f är integrerbar om och endast om det för varje $\epsilon > 0$ finns trappfunktioner Φ och Ψ med

$$\Phi(x) \leq f(x) \leq \Psi(x) \text{ och } I(\Psi) - I(\Phi) < \epsilon \ .$$