Tentamen L9MA20, LGMA20 Envariabelanalys, 7,5 poäng
Fredag 1 september, kortfattade lösningar

1. (a)

$$\int_{-1}^{1} x(x+1)^4\,dx = \begin{bmatrix} t = x+1, & x = t-1, & dx = dt \\ -1 \mapsto 0, & 1 \mapsto 2 & \end{bmatrix}$$

$$= \int_0^2 (t-1)t^4 dt = \int_0^2 t^5 - t^4 dt = \left[\frac{t^6}{6} - \frac{t^5}{5}\right]_0^2 = \frac{64}{15}.$$

(b)

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x}, x = t^2, & 0 \mapsto 0, \\ dx = 2tdt, & \infty \mapsto \infty \end{bmatrix}$$

$$= \int_0^\infty 2te^{-t}\,dt = [PI] = 2\left([-te^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}\,dt\right) = 2[-e^{-t}]_0^\infty = 2.$$

2. Låt

$$f(x) = \frac{x^3}{x+1}\ .$$

Då är

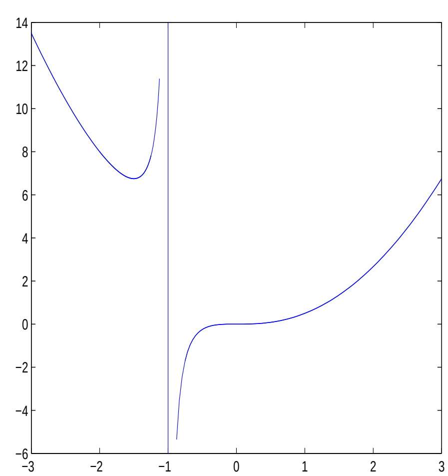
$$f'(x) = \frac{(3x^2(x+1) - x^3)}{(x+1)^2} = \frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$$

och vi får följande teckentabell

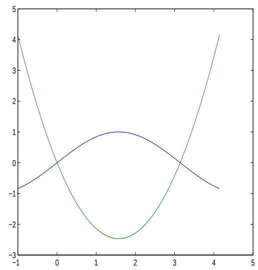
x		$-3/2$		-1		0	
f'	$-$	0	$+$	$\sim$	$+$	0	$+$
f	$\searrow$	$27/4$	$\nearrow$	$\sim$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

.

Vi ser att f har ett lokalt minimum då $x = -\frac{3}{2}$ och en terasspunkt $(0,0)$ och en lodrät asymptot $x = -1$. För stort $|x|$ är $f(x) \approx x^2$ så sned eller vågrät asymptot saknas.



3. Från figuren



ser vi att kurvorna skär varandra då $x = 0$ och $x = \pi$. Så arean är

$$A = \int_0^{\pi} \sin x - x(x-\pi)dx = \left[-\cos x - \frac{x^3}{3} + \frac{\pi x^2}{2} \right]_0^{\pi} = 2 + \frac{\pi^3}{6} \ .$$

4. (a) Vi har

$$Dx \ln x = 1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1 \ .$$

(b) Låt $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sin t^2 \, dt$. Integralkalkylens fundamentalsats ger att $F'(x) = \sin x^2$.

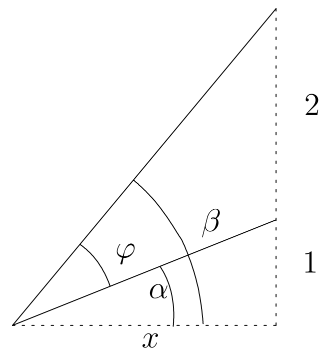
(c) Vi har

$$\int_{-x}^{x} \sin t^2 \, dt = \int_{-x}^{0} \sin t^2 \, dt + \int_0^x \sin t^2 \, dt = \int_0^x \sin t^2 \, dt - \int_0^{-x} \sin t^2 \, dt = F(x) - F(-x) \ .$$

Så kedjeregeln ger att derivatan är

$$F'(x) - F'(-x)D(-x) = F'(x) + F'(-x) = 2\sin x^2 \ .$$

5. Med beteckningar som i figuren



gäller $\tan\beta = \dfrac{3}{x}$ och $\tan\alpha = \dfrac{1}{x}$. Så det gäller att maximera

$$\varphi(x) = \beta(x) - \alpha(x) = \arctan\frac{3}{x} - \arctan\frac{1}{x}\ .$$

Vi har

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+(3/x)^2}\cdot\left(-\frac{3}{x^2}\right) - \frac{1}{1+(1/x)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{3}{9+x^2} = \frac{6-2x^2}{(1+x^2)(9+x^2)}\ .$$

Så $\varphi'(x) = 0$ då $2x^2 = 6$, dvs. då $x = \frac{+}{(-)}\sqrt{3}$. Alltså skall Kerstin stå $\sqrt{3}$ meter från väggen.

6. Se kurslitteraturen (sid. 203).