Diskussionsuppgifter

Kursens övningsbok är skriven för teknologer. Därför är nästan alla uppgifter beräkningsuppgifter. Det är naturligtvis viktigt att kunna göra beräkningar. Men för en lärare är det (minst) lika viktigt att förstå de olika begreppen och deras relationer. Dessa uppgifter syftar till att träna denna förmåga.

I uppgifterna finns ett antal påståenden, en del sanna, en del falska. Ni skall försöka komma fram till vilka som är sanna och vilka som är falska. Om påståendet är sant skall ni motivera (bevisa) det, och om påståendet är falskt skall ni ge ett motexempel. Lycka till!

1. Funktionsbegreppet

Övning 1.1. Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är definierade på $\mathbb{R}$. Då gäller

(a) Om $f(x)$ och $g(x)$ är växande så är $f(x) + g(x)$ också växande.

(b) Om $f(x)$ och $g(x)$ är monotona så är $f(x) + g(x)$ också monoton.

(c) Om $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga och monotona så är $f(x) + g(x)$ också monoton.

(d) Om varken $f(x)$ eller $g(x)$ är monotona så är inte heller $f(x)+g(x)$ monoton.

Övning 1.2. Antag att $f(x)$ är definierad på $(0, 1)$. Då gäller

(a) Om f är strängt avtagande så är f inverterbar.

(b) Om f är inverterbar så är f monoton.

(c) Om f är inverterbar och kontinuerlig så är f monoton.

(d) Om f inte är monoton på något delintervall till $(0, 1)$ så är f inte inverterar.

Övning 1.3. Låt f vara en funktion på $\mathbb{R}$. Då gäller

(a) Om det för varje reellt x finns ett tal $M > 0$ så att $|f(x)| \leq M$, så är f begränsad.

(b) Om det finns ett tal $M > 0$ så att för varje reellt x gäller $|f(x)| \leq M$, så är f begränsad.

Övning 1.4. Låt f vara en funktion på $[-1, 1]$ som antar sitt största värde. Då gäller

(a) Om f inte är konstant på något delintervall så kan inte f anta sitt största värde oändligt många gånger.

(b) Om f är kontinuerlig men inte konstant på något delintervall så kan inte f anta sitt största värde oändligt många gånger.

Övning 1.5. Låt f vara en funktion på $(-1, 1)$.

(a) Om f^2 är monoton så är f monoton.

(b) Om f är monoton så är f^2 monoton.

(c) Om f^2 är monoton så är f monoton på något delintervall.

(d) Om f är monoton så är f^2 monoton på något delintervall.

2. Gränsvärden och kontinuitet

Övning 2.1. Antag $f(x) < g(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$ och att $A = \lim_{x\to\infty} f(x)$ och $B = \lim_{x\to\infty} g(x)$ existerar. Då gäller

(a) $A < B$.

(b) $A \leq B$.

Övning 2.2. Antag att $g(x)$ är en begränsad funktion på $\mathbb{R}$.

(a) Då existerar $\lim_{x\to 0} g(x)$.

(b) Om $\lim_{x\to 0} g(x)$ *inte* existerar och $\lim_{x\to 0} f(x)$ existerar, så existerar inte $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$.

(c) Om $\lim_{x\to} g(x)$ *inte* existerar och $\lim_{x\to 0} f(x)$ existerar och är skilt från 0, så existerar inte $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$.

Övning 2.3.

(a) Om $f(x)$ inte är begränsad nära $x = 0$ så gäller $\lim_{x\to 0} |f(x)| = \infty$.

(b) Om $\lim_{x\to 0} |f(x)| = \infty$ är $f(x)$ inte begränsad nära 0.

(c) Om $\lim_{x\to 0} |f(x)| = \infty$ så gäller antingen $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ eller $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

Övning 2.4. Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är definierade på $[-1, 1]$.

(a) Om $|f(x)|$ är kontinuerlig så är $f(x)$ det också.

(b) Om $f(x)$ är kontinuerlig så är $|f(x)|$ det också.

(c) Om både $f(x)$ och $g(x)$ är diskontinuerliga då $x = 0$ så är $f(x) + g(x)$ det också.

(d) Om både $f(x)$ och $g(x)$ är diskontinuerliga då $x = 0$ så är $f(x)g(x)$ det också.

(e) Om $f(x)$ är kontinuerlig och $g(x)$ är diskontinuerlig då $x = 0$ så är $f(x)+g(x)$ diskontinuerlig.

(f) Om $f(x)$ är kontinuerlig och $g(x)$ är diskontinuerlig då $x = 0$ så är $f(x)g(x)$ diskontinuerlig.