Lösningsförslag till tentamen i matematisk analys, L9MA20/LGMA20, 20180103, f.m.

Betygsgränser:	För godkänt krävs minst 11.0 p.
	Betyg U: 0-10.5 p, betyg G: 11.0-17.5, betyg 5: 18.0 p och uppåt
Bonuspoäng:	Från VT 2017, LP3

1. Beräkna gränsvärdena...

   (a)
   $$\lim_{x\to -3/2}\frac{2x^2-7x-15}{(2x^2+3x)}=\lim_{x\to -3/2}\frac{(2x+3)(x-5)}{(x(2x+3)}=\lim_{x\to -3/2}\frac{(x-5)}{x}=\frac{13}{3}.$$

   (b)
   $$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^{3/2}/x^{3/2}}{2x\sqrt{2x}/x^{3/2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2+5/x)^{3/2}}{2\sqrt{2}}=1$$

   så att
   $$\lim_{x\to\infty}\arctan\left(\frac{(2x+3)^{3/2}/x^{3/2}}{2x\sqrt{2x}/x^{3/2}}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

   (c)
   $$(1-3x)^{2/x}=\{x=1/n\}=(1-3/n)^{2n}=\left[(1-3/n)^{(-n/3)}\right]^{-6}\to e^{-6} \text{ då } n\to\infty.$$

   1.5p+1.5p+1.5p

2. (a) Derivera funktionen...
   $$f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x\,\tan x=\frac{1}{2}\cdot 2\sin x\cos x\cdot\sin x/\cos x=\sin^2 x\to f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x.$$

   (b) Integralen $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^5 x\,dx=0$ eftersom integranden är udda och integrationsintervallet är symmetriskt.

   (c) Funktionen $F(x)=\int_0^x\frac{t^3}{t^4+1}\,dt$ antar ett minsta värde. Dess derivata är
   $$F'(x)=\frac{x^3}{x^4+1} \text{ och } F'x)=0\iff x=0,$$
   en minimpunkt med koordinater $(0,F(0))=(0,0)$. 1.5p+1.5p+1.5p

   Teckenschema 3.0p

x	$<$	-2	$<$	$-2/\sqrt{3}$	$<$	0	$<$	$2/\sqrt{3}$	$<$	2	$<$
$g'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	-1	$\searrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	1	$\nearrow$

   Definitionsmängd, stationära punkter som ovan. Sned asymptot $y=\frac{x}{3}$ och lodräta asymptoter $x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$.

3. Ytan som begränsas av kurvan $y=x\cdot e^{-x}:=h(x)$, $y=0$, där $0\le x<\infty$, roterar kring $x-$axeln. Beräkna kroppens volym... Primitv funktion till $h(x)^2=x^2e^{-2x}$:
   $$\int_1^\infty x^2e^{-2x}dx=\{\text{P.I.}\}=-\frac{1}{2}\cdot x^2e^{-2x}+\frac{1}{2}\int 2xe^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\cdot x^2e^{-2x}-\frac{1}{2}\cdot xe^{-2x}+\frac{1}{2}\int 2e^{-2x}dx$$
   $$\begin{aligned} V &= \pi\int_1^\infty x^2e^{-2x}dx=\{\text{P.I.}\}=\pi\int_1^\infty\left[-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x}\right]dx= \\ &= \pi\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b+1}+\frac{1}{1+1}+\ln\frac{1}{1+1/b}+\ln(1+1)\right]=\pi\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right) \text{ v.e.}\end{aligned}$$
   3.0p

4. Givet kurvan $y=e^{-x^2}$. En sådan rektangel har arean $2x\cdot e^{-x^2}=:A(x)$, $x\ge 0$.
   $$A'(x)=2e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)=0\iff x=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ och } A(1/\sqrt{2})=\sqrt{\frac{2}{e}}$$
   som är den största area som en sådan rektangel kan ha. 3.0p

5. Beräkna integralen $\int_1^\infty \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,dx \ldots$

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx &= -\ln x\cdot\frac{1}{x+1}+\int\frac{dx}{x(x+1)} = \{\text{PBU}\} = -\ln x\cdot\frac{1}{x+1}+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx = \\ & -\ln x\cdot\frac{1}{x+1}+\ln x-\ln(x+1)+C \\ \int_a^1 \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,dx &= \left[\frac{\ln a}{a+1}-\ln\left(\frac{1}{1+1/a}\right)-\frac{\ln 1}{1+1}\right]\end{aligned}$$

3.0p

6. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats...
Antag att $f(x)$ kontinuerligt deriverar i intervallet $[a,b]$. Då finns ett $\xi\in(a,b)$, sådant att

$$I := \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi).$$

Bevis: $f(x)$ antar ett största och minsta värde i intervallet $[a,b]$, $f_{\max}$ resp. $f_{\min}$ (p.g.a. kontinuitet och satsen om största och minsta värde). Alltså är

$$(b-a)f_{\min}\le I\le(b-a)f_{\max}$$

Eftersom VL och HL är en under- resp. översumma. Därmed är

$$f_{\min}\le\frac{I}{b-a}\le f_{\max}.$$

Enligt satsen om mellanliggande värde finns $\xi\in(a,b)$ sådant att

$$f(\xi)=\frac{I}{b-a}\text{ eller ekvivalent }(b-a)f(\xi)=I=\int_a^b f(x)dx.$$

3.0p