1 Föreläsning I

1.1 Talmängder

-
$$\begin{array}{rc}
\text{Mängden av naturliga tal:} & \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\} \\
\text{Mängden av positiva heltal:} & \mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, ...\} \\
\text{Mängden av heltal:} & \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\} \\
\text{Mängden rationella tal:} & \mathbb{Q} = \{p/q:\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\} \\
\text{Mängden av reella tal:} & \mathbb{R} = \{x:\ -\infty < x < \infty\}
\end{array}$$

- **Mer om talmängder**
  Öppet intervall

som skrivs

$$(a, b) := \{x:\ a < x < b\}, \quad -\infty \leq a, \text{ och } b \leq \infty.$$

Slutet och begränsat intervall (kompakt intervall)

som skrivs

$$[a, b] := \{x:\ a \leq x \leq b\}, \quad -\infty < a, \text{ och } b < \infty.$$

- En funktion $f = f(x)$ har en definitionsmängd D_f som innehåller/utgörs av alla x för vilken funktionen är definierad.

- För varje $x \in D_f$ finns precis ett värde $f(x)(= y)$.

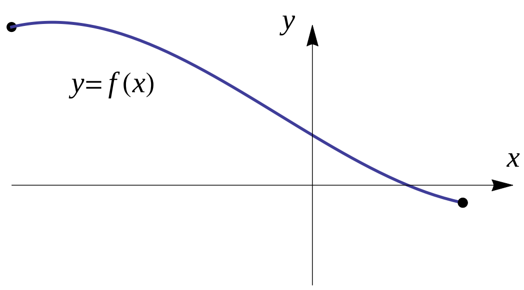
- Mängden $V_f := \{y : \exists\, x \in D_f :\ y = f(x)\}$ kallas värdemängden av f.

Ex 1.1 Funktionen $f(x) = \sqrt{x+1}$ är definierad för de x, som uppfyller olikheten $x + 1 \geq 0$, d.v.s. för $x \geq -1$. Alltså är

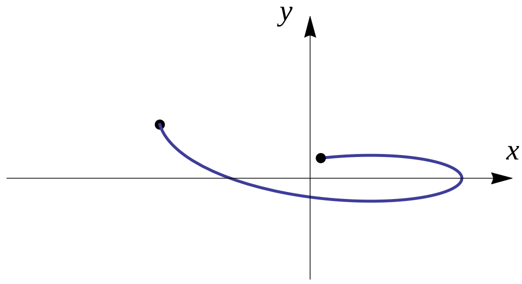
$$D_f = \{x:\ x \geq -1\} = [-1, \infty) \text{ och } V_f = [0, \infty)\,.$$

ett slutet och obegränsad mängd, speciellt utgör båda exempel på slutet och obegränsat intervall.

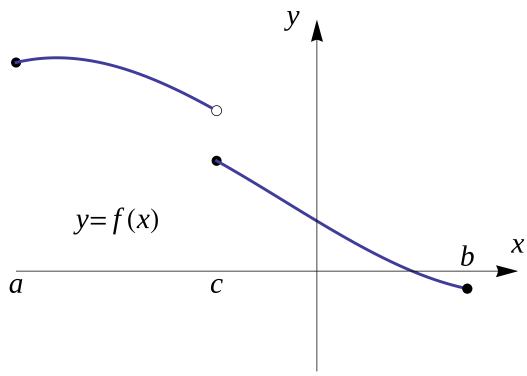
- Graf av en kontinuerlig funktion, $f(x)$, definierat på det kompakta intervallet $[a, b]$.



Figuren nedan är inte grafen av en funktion $y = f(x)$, eftersom det finns fler än ett y för en del x.



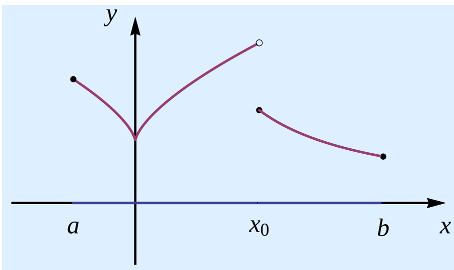
Grafen nedan är grafen av en funktion. Funktionen är inte kontinuerlig.



Sats En kontinuerlig funktion definierat på ett kompakt intervall antar ett största och minsta värde, samt alla värden däremellan.

Dessa kallas

- Satsen om största och minstas värde respektive
- Satsen om mellanliggande värde.

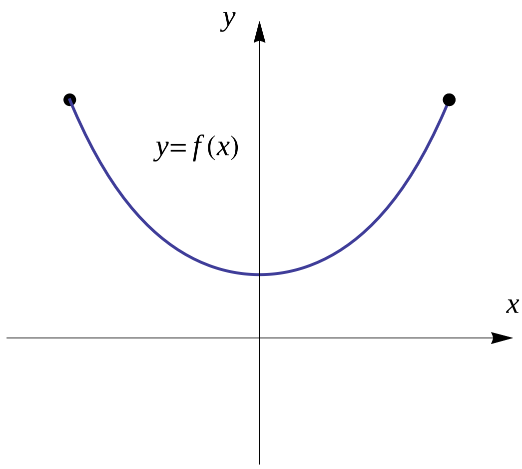


Funktionen är diskontinuerlig (i x_0) och antar inte heller något största värde.

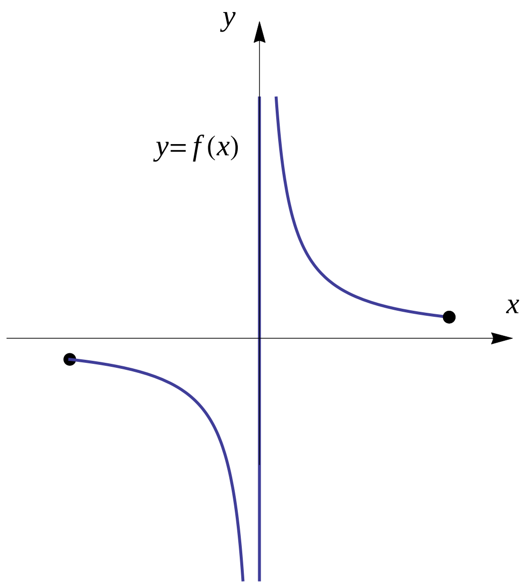
- Våra elementära funktioner är i stort sett alla, kontinuerliga (och mycket mer.)
- De elementära funktionerna utgör en liten skara funktioner men tillräckliga för att beskriva det mesta. De vanligaste är

Potensfunktion:	$f(x) = C\,x^a$
Polynom:	$g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad a_n \neq 0.$
Exponentialfunktion:	$h(x) = C\,a^x$
Speciellt:	$f(x) = e^x$
Logaritmfunktion, speciellt:	$g(x) = \ln x$
Trigonometriska funktioner:	$g_1(x) = \cos x$
	$g_2(x) = \sin x$
	$g_3(x) = \tan x = \dfrac{g_2(x)}{g_1(x)}$

- En funktion är jämn om $f(x) = f(-x)$, ex.vis $f(x) = \cos x$ och $g(x) = x^4$.

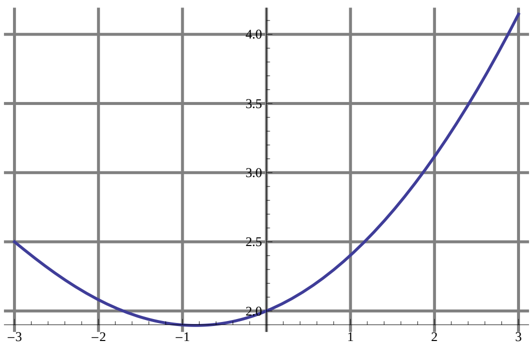


En funktion är udda om $-f(x) = f(-x)$, ex.vis $f(x) = \dfrac{1}{x}$ och $g(x) = e^x - e^{-x}$.



$f(x) = e^x$ är varken udda eller jämn.

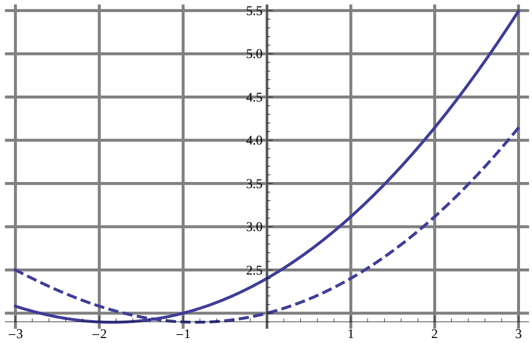
Ex 1.2 Givet grafen $y = f(x)$,



rita

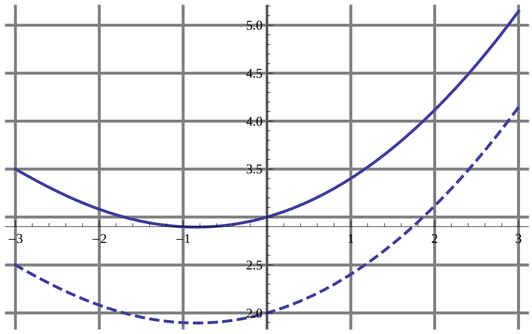
1. $y = f(x + 1)$.

Lösning: Det är samma kurva fast förskjuten en enhet åt vänster.



2. $y = f(x) + 1$

Lösning: Det är samma kurva fast förskjuten en enhet uppåt.



Definition av absolutbelopp

$$|x| = \begin{cases} -x, \text{ om } x < 0 \\ x, \text{ om } x \geq 0 \end{cases} .$$

Obs! $|x| \geq 0$, $|a - b| = |b - a|$ och $|-a - b| = |a + b|$ (Verifiera med exempel!).

Ex 1.3 a) $|-3| = 3$ och $|3| = 3$. $|3 - 5| = |-2| = 2$.
Skriv utan beloppstecken:

Lösning: Genom att kvadrera får vi att $(2\sqrt{2})^2 = 8$ och $3^2 = 9$. Alltså är $2\sqrt{2} < 3$. Därmed är $|2\sqrt{2} - 3| = 3 - 2\sqrt{2}$.

Ex 1.3 b) Ett par omskrivningar (b) och c)):

$$|4 \cdot (-3)| = |-12| = 12 = \{\text{och alltså}\} = |4| \cdot |-3|.$$

Ex 1.3 c)

$$|2x + 4| = |2(x + 2)| = |2| \cdot |x + 2| = 2|x + 2|.$$

Ex 1.3 d) En ekvation, ett intervall och en olikhet:

$$|2x + 4| = 2, \quad I := \{x : -4 < x < 2\}, \quad |x + 1| < 3.$$

Lös ekvationen, skriv intervallet med abs. belopp och lös olikheten.

Lösning: **Ekvationen:**

$$|2x + 4| = 2 \Leftrightarrow |x + 2| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 : & x + 2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \\ x < -2 : & -(x + 2) = 1 \Leftrightarrow x = -3 \end{cases}$$

Obs! Båda rötterna är *riktiga*. (Ekvationen kan skrivas $x + 2 = \pm 1$.)
Intervallet:

Intervallet kan skrivas

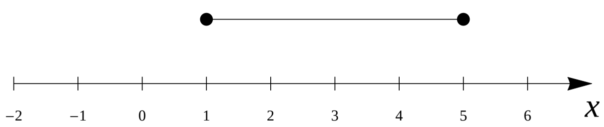
$$I = \{x : -3 < x+1 < 3\} = \{x :\ |x+1| < 3\}.$$

Olikheten kan enligt ovan skrivas som dubbelolikheten $-4 < x < 2$.

Ex 1.5 Absolutbelopp och avstånd: $|3-5| = 2$ är avståndet mellan 3 och 5. P.s.s. är $|3+5| = |3-(-5)| = 8$ avståndet mellan -3 och 5.

Ex 1.6 Lös ekvationen $|x-3| = 2$ genom att tolka som avstånd.

Lösning: Med avståndstolkningen är $x = 5$ eller $x = 1$.



Ex 1.7 (a) Vilket intervall är mängden $\{x :\ |x+1| < 5\}$?
(b) Skriv intervallet $[-4, 7]$ med absolutbelopp!

Lösning: (a) Det är alltså alla x vars avstånd till -1 är strängt mindre än 5, d.v.s. intervallet $(-6, 4) = \{x :\ |x+1| < 5\}$.
(b) $[-4, 7] = \{x : -4 \leq x \leq 7\}$. Mittpunkten i intervallet är medelvärdet mellan ändpunkterna: $\dfrac{7-4}{2} = 3/2$. Intervallets halva längd är $\dfrac{7-(-4)}{2} = 11/2$.

$$[-4, 7] = \{x : |x - 3/2| \leq 11/2\}.$$

1.2 Funktioner forts

För att kunna exemplifiera gränsvärde och kontinuitet (samt derivata) behöver man införa de *elementära funktionerna*. Dessa utgör "basen" för att uttrycka matematiska samband.

1.2.1 Elementära funktioner

1. Potensfunktion $f(x) = C\,x^a$.

2. Monom och polynom $f(x) = C\,x^k$, $k \in \mathbb{N}$ respektive $g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, ex.vis $g(x) = x^3 - 2x + 1$, ett polynom av grad 3.

3. Rationell funktion $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, där $p(x)$ och $q(x)$ är polynom.

4. Exponentialfunktion $f(x) = Ca^x$, $a > 0$, logaritmfunktion ex.vis $g(x) = \lg x$ och $h(x) = \ln x$. Dessa är inversfunktioner till $g^{-1}(x) = 10^x$ respektive $h^{-1}(x) = e^x$.

5. Trigonometriska funktioner, arcusfunktioner (definition med rätvinklig triangel och enhetscirkel. Några identiteter).

$$\begin{cases} \sin x, \quad \cos x, \quad \tan x \\ \\ \arcsin x, \quad \arccos x, \quad \arctan x \end{cases}$$

1.2.2 Bildande av nya funktioner

Man kan bilda nya funktioner av givna funktioner. Givet två funktioner $f(x)$ och $g(x)$. De främsta sätten är

1. konstant c gånger funktion, såsom $c\,f(x)$.
2. Summa/differens $f(x) \pm g(x)$,
3. produkt/kvot $f(x) \cdot g(x)^{\pm 1}$ och
4. sammansättning $f(g(x)) = \{\text{även}\} = f \circ g(x)$.

Ex 1.8 Låt $f(x) = \sin x$ och $g(x) = x^2$. Då är

$$f(g(x)) = \sin(x^2) \text{ och } g(f(x)) = g(\sin x) = \sin^2 x.$$

5. Om det finns (högst) ett x för varje y, sådant att $y = h(x)$, har $h(x)$ en inversfunktion $h^{-1}(x) = y$. Funktionen $h(x) = x^2$ har ingen invers, eftersom $y = 3 = x^2$ motsvaras av två $x: \quad x = \pm\sqrt{3}$.

   Ex.vis är $h(x) = x^3 = x \cdot x^2$, alltså en produkt mellan två funktioner.

LogaritmeEx 1.9 Omskrivning av $\lg(3 + 1.5)$.

(a) Förenkling av $\dfrac{5^{\lg 5}}{2^{\lg 2}}$.