Föreläsning X

Integral forts

Vi har nu två metoder, P.I. och V.S. att beräkna integraler. Vi tränar på dessa.

Ex 54: Beräkna integralen $\int \ln x \, dx$.

Lösning:

Vi kan försöka med V.S. $\ln x = t$, som ger $x = e^t$ och därmed $\dfrac{dx}{dt} = e^t$.

$$\int \ln x \, dx = \int te^t \, dt.$$

Den klarar vi med P.I.

$$\int t \, e^t dt = te^t - \int 1 \cdot e^t dt = (t-1)e^t + C = x(\ln x - 1) + C.$$

Kan man även beräkna integralen med P.I.? Vi skriver

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + C.$$

Ex 55: Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} =: I.$

Lösning:

Sätt det krångliga uttrycket $e^x + 1 = t$, alltså V.S. Det ger

$$x = \ln(t-1) \Longrightarrow dx = \frac{dt}{t-1}.$$

Nu har vi gränser, som vi byter till $t-$gränser.

$$\begin{array}{rcc} x: & 0 & 1 \\ t: & 2 & e+1 \end{array}$$

Vi får integralen

$$\begin{aligned} I &= \int_2^{e+1} \frac{dt}{t(t-1)} = \{\text{PBU}\} = \int_2^{e+1} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = \\ &= \left[\ln\left(\frac{t-1}{t} \right) \right]_2^{e+1} = \ln\left(\frac{e}{e+1} \right) - \ln\left(\frac{1}{2} \right) = \\ &= 1 + \ln 2 - \ln(e+1) \end{aligned}$$

Ex 56: (Rationell integrand)

Beräkna en primitiv funktion till $h(x) = \dfrac{3x+1}{(x-1)^2}$.

Lösning:

Hur skall en ansättning i partialbråk se ut? Vi kan skriva om

$$\frac{3x+1}{(x-1)^2} = \frac{3(x-1)+4}{(x-1)^2} = \{\text{termvis division}\} = \frac{3}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2}.$$

Dessa termer kan nu lätt integreras.

$$\int h(x)dx = 3\ln(x-1) - \frac{4}{x-1} + C.$$

Svar: En p.f. till $h(x)$ är $H(x) = 3\ln(x-1) - \dfrac{4}{x-1}$.

Ex 57: (Area mellan kurvor)

För två kurvor definierade i samma intervall kan man beräkna arean mellan kurvorna. Givet kurvorna $y + x = 0$ och $y = \dfrac{1}{2x+3}$. De begränsar ett område i talplanet. Beräkna områdets (ytans) area.

Lösning:

Vi har ingen begränsning på integrationsintervallet, så $x-$gränser år skärningspunkter mellan kurvorna. Lös alltså ekvationen

$$y = -x = \frac{1}{2x+3} \iff (2x+3)\cdot x + 1 = 0 \iff \begin{cases} x = -1 \\ \\ x = -1/2 \end{cases}$$

Arean är

$$\int_{-1}^{-1/2} (-x - \frac{1}{2x+3})dx = \left[-\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\ln(2x+3)\right]_{-1}^{-1/2} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Observera att $-x \geq \dfrac{1}{2x+3}$ i intervallet, så vi får arean med rätt tecken.

Kommentarer:

1. Man behöver inte hålla reda på vilken funktion som är störst i det aktuella intervallet. Det är bara att se till att tecknet i svaret är " + ".
2. Dock, om kurvorna skär varandra fler än två gånger får man dock hålla reda på vilken funktion som är störst i respektive delintervall.
3. Vi kan ta som definition av area mellan två kurvor, där $a < b$, som
$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$
Men det är inte direkt möjligt att ta fram p.f. när man har absolutbelopp.
4. Redan med $\int_a^b f(x)dx$ Får vi area med tecken mellan $y = 0 =: g(x)$ och $y = f(x)$.

Generaliserad integral

För gen. int. år antingen integrationsintervallet obegränsat eller så är integranden obegränsad.

- Beräkna integralen $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ för olika α.

  Lösning:

  Man ser en gen. int. som ett gränsvärde där övre gräns $b \to \infty$.
  Vi provar med $\alpha_1 = 2$. Vi får p.f. $-\frac{1}{x}$ och beräknar

  $$\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \frac{1}{1} - \frac{1}{b} \to 1 \text{ då } b \to \infty.$$

  Svar: Integralen är konvergent med värdet 1.

Ex 58: Hur är det med konvergens/divergens för $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ för olika reella α? Vi tar nu och beräknar integralen $\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$ och ersätter undre gräns med $a > 0$, som vi sedan låter gå mot noll. Vi får

$$\int_a^1 \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^1 = \frac{1}{a} - 1 \to \infty$$

då $a \to 0_+$. Alltså är integralen divergent.

Kommentar:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \text{ konvergent omm } \alpha < 1.$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \text{ konvergent omm } \alpha > 1.$$

För $\alpha = 1$ får vi divergens både för $[0, 1]$ och $[1, \infty)$. Varför?

Ex 59: Integralen $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ är generaliserad eftersom integranden är obegr. samt konvergent eftersom $\alpha = 1/2 < 1$. En p.f. funktion är

$$\frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} = 2\sqrt{x}.$$

Dess värde fås som

$$\lim_{a\to 0_+} 2[\sqrt{x}]_a^1 = 2.$$

Ex 60: Beräkna $\displaystyle\int_0^\infty (x-2)e^{-x/2}dx$.

Lösning:

Integralen är generaliserad ty intervallet är obegr. Vi beräknar först en primitiv funktion $-2xe^{-x/2}$ (Se tidigare exempel). Därefter beräknar vi integralen

$$\int_0^b (x-2)e^{-x/2}dx = 0 + 2be^{-b/2}$$

och låter $b \longrightarrow \infty$. Gränsvärdet är då den generaliserade integralens värde alltså 0.

Kommentarer:

– Eftersom integralens värde är reellt (och entydigt) är integralen konvergent. Man skriver

$$\int_0^\infty (x-2)e^{-x/2}dx = 0.$$

– Eftersom integralens värde är $= 0$, finns lika stor area under som över $x-$axeln för $x \geq 0$.

– Vi ser att $(x-2)e^{-x/2}$ har en primitiv funktion $-2xe^{-x/2}$. Detta är typiskt. För en integrand $p(x)e^{kx}$, där $k \neq 0$ och $p(x)$ är ett polynom av grad n, så är en primitiv funktion

$$q(x)e^{kx},$$

där $q(x)$ är ett polynom av samma grad som $p(x)$.

Definition: *Om en integrals värde är reellt och entydigt, så är integralen konvergent.*

Kommentarer:

För att avgöra om en (generaliserad) integral är konvergent eller divergent, kan man i en del fall avgöra detta genom direkt beräkning av integralen, som ovan.

Ett annat sätt är som innan exempel 58, betrakta $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ och $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ för olika reella α.

Ytterligare sätt är att, som i exempel 60, ha en integrand, som är ett polynom $p(x)$ gånger $e^{k\,x}$ för ett $k < 0$ ($k = -1/2$ i exemplet). Då är $\displaystyle\int_0^\infty p(x)e^{kx}dx$ konvergent.

Ex 61: Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 \ln x\, dx$.

Lösning:

Den är generaliserad eftersom $\ln x \to -\infty$ då $x \to 0_+$, d.v.s. obegränsad integrand. Låt $a > 0$.

$$\int_a^1 \ln x\, dx = [1 \cdot \ln 1 - 1 - (a \ln a - a)] \to -1 \text{ då } a \to 0_+.$$

Obs! $a \ln a \to 0$, då $a \to 0_+$. Alltså konvergent med värdet -1.

Ex 62: Beräkna $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + 1}$.

Lösning:

Vi har tagit fram p.f. i exempel 55. Vi fick, med V.S. följande

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \ln\left(\frac{t-1}{t}\right) + C = \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + C.$$

Den generaliserade integralens värde fås som ett gränsvärde.

$$\left[\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)\right]_0^b = \ln\left(\frac{e^b}{e^b+1}\right) - \ln\left(\frac{e^0}{e^0+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{1+e^{-b}}\right) + \ln 2 \to \ln 2$$

då $b \to \infty$.
Svar: Integralen är konvergent med värde $\ln 2$.

Sats Monotonitet.
Antag $a < b$, $f(x) \le g(x)$ integrerbara på $[a, b]$. Då gäller

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx. \tag{1}$$

Sats Ett jämförelsekriterium.
Givet $0 \le f(x) \le g(x)$ för $x \in (a, b)$.

$$\int_a^b g(x)dx \text{ konvergent } \implies \int_a^b f(x)dx \text{ konvergent.}$$

Ex 63: Vi avgör om $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$ är konvergent eller divergent.

Lösning:

Den är generaliserad i $x = \infty$. För $x : 0 \le x \le 1$ är det inga problem med konvergens. Vi jämför därför med $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ i intervaller $[1, \infty)$. Nu är

$$g(x) \ge \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} =: f(x) \ge 0 \text{ för } x \ge 1.$$

Integralen $\displaystyle\int_1^\infty g(x)dx$ är konvergent enligt tidigare, så $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$ är därmed konvergent.

Kommentar: I exempel 62 har vi en konvergent integral eftersom vi beräknade den och fick ett ändligt värde. Att avgöra konvergens utan att beräkna den, kan göras genom att jämföra $f(x) = \dfrac{1}{e^x + 1}$ med den större funktionen $g(x) = e^{-x}$ och $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}dx$ är konvergent.

- Orientering för (enkel-)integral.

$$-\int_a^b f(x)dx = -(F(b) - F(a)) = F(a) - F(b) = \int_b^a f(x)dx.$$

- Triangelolikheten för integral.
Antag $a < b$ och $f(x)$ integrerbar på $[a, b]$. Då gäller

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx. \tag{2}$$

(Det spelar alltså roll *var* man sätter absolutbeloppet.)

Bevis:

- $\pm A \leq |A|$
- $|A| \leq B$ är ekvivalent med att $\pm A \leq B$.
- Av den första punkten ovan följer att $\pm f(x) \leq |f(x)|$.
- Monotoniteten ger

$$\pm\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

eller ekvivalent, p.g.a. den andra punkten följer (2).
