

1 Föreläsning II

1.1 Gränsvärde

Ex1.1 Vi undersöker värdena på $g(x) = \frac{x+3}{2x}$, då $x \rightarrow \infty$ och $x \rightarrow 1$.

$x \rightarrow \infty$: Vi skriver om funktionen med en *polynomdivision*.

$$g(x) = \frac{x+3}{2x} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2x}.$$

För $x \rightarrow \infty$: Om x stort (och positivt), är den första termen (till sitt belopp) liten, så att

$$y = g(x) \approx 0 + \frac{1}{2}.$$

Det måste vara så att $g(x) \rightarrow 1/2$, då $x \rightarrow \infty$. Vi visar det och resonerar så här. Om bara x tillräckligt stort så är $g(x)$ "godtyckligt" nära $1/2$. Mer exakt uttrycks det så här:

Tag ett *godtyckligt* litet men positivt tal $\varepsilon (> 0)$ så att avståndet mellan $g(x)$ och $1/2$ är mindre än ε , d.v.s.

$$|g(x) - 1/2| < \varepsilon \text{ om } (\Leftrightarrow) x > x_0$$

För något x_0 .

Det gäller nu att visa att det för ett godtyckligt $\varepsilon > 0$ korresponderar ett x_0 .

Sätt

$$\begin{aligned} \varepsilon > |g(x) - 1/2| &= \{g(x) > 1/2\} = g(x) - 1/2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2x} - \frac{1}{2} = \\ &= \frac{3}{2x} \Leftrightarrow x > \frac{3}{2\varepsilon} =: x_0. \end{aligned}$$

Så skall vi alltså välja x_0 . Med detta val får vi

$$|g(x) - 1/2| < \varepsilon \text{ om } (\Leftrightarrow) x > x_0.$$

Definition

En funktion $g(x)$ har gränsvärdet A , då $x \rightarrow \infty$ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett x_0 , sådant att

$$x > x_0 \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$x \rightarrow 1$: Vi ser att $g(1) = 2$ så det är rimligt att $g(x)$ går mot 2.

Vi jämför med gränsvärdet ovan men här gäller det att $|g(x) - 2| < \varepsilon$ för ett godt. $\varepsilon > 0$,

om bara x tillräckligt nära 1. "tillräckligt nära" får betyda att $|x - 1| < \delta$ för något $\delta > 0$.

Vi sätter

$$\varepsilon > |g(x) - 2| = \dots = \frac{2}{3} \left| \frac{x-1}{2x} \right| = \frac{1}{3} \left| \frac{x-1}{x} \right|$$

Vi börjar med att välja $x : |x| < 2$. Då får vi olikheten

$$\varepsilon > \frac{1}{3 \cdot 2} |x-1| \Leftrightarrow |x-1| < 6\varepsilon =: \delta.$$

Med detta val av δ blir $|g(x) - 2| < \varepsilon$.

Definition

En funktion $g(x)$ har gränsvärdet A , då $x \rightarrow a$, $a \in \mathbb{R}$, om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$, sådant att

$$|x - a| < \delta \implies |g(x) - A| < \varepsilon.$$

(a) Vad händer med $g(x)$ då $x \rightarrow 0_+$?

Lösning

Vi ser att $D_g = \{x : x \neq 0\}$ och att $g(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 0_+$. Vi skriver detta som $g(x) \rightarrow \infty$, då $x \rightarrow 0_+$.

Man talar om ett oegentligt gränsvärde

Definition

$g(x) \rightarrow \infty$, då $x \rightarrow x_0$, om det För varje y_0 finns ett $\delta > 0$, sådant att

$$|x - x_0| < \delta \implies g(x) > y_0.$$

1.2 Kontinuitet

I exemplet har $g(x)$ den sneda asymptoten $y = 1/2$ och den lodräta asymptoten $x = 0$.

- Vi ser också att $x = 1$ ligger i D_g samt att $g(x)$ har gränsvärdet 2, då $x \rightarrow 1$.
Eftersom $g(1) = 2$ säger man att $g(x)$ är kontinuerlig i $x = 1$.

Defintion:

Antag att $a \in D_g$ och att $g(x) \rightarrow g(a)$, då $x \rightarrow a$.

Då är funktionen g kontinuerlig i a .

Om g kontinuerlig i alla punkter $a \in D_g$ är funktionen kontinuerlig.

- De elementära funktionerna är kontinuerliga.

Sats (Instängningslagen) Om $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, samt att $f(x) \rightarrow A$ och $h(x) \rightarrow A$, då $x \rightarrow a$, så gäller att

$$g(x) \rightarrow A.$$

Bevis

Tag $\varepsilon > 0$.

Då finns $\delta_1 > 0$, sådant att $-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon$, om $|x - a| < \delta_1$ samt så finns $\delta_2 > 0$, sådant att $-\varepsilon < h(x) - A < \varepsilon$, om $|x - a| < \delta_2$.

Låt nu $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$ och antag att $|x - a| < \delta$. Då gäller

$$-\varepsilon < f(x) - A \leq g(x) - A \leq h(x) - A < \varepsilon$$

eller ekvivalent

$$|x - a| < \delta \implies |g(x) - A| < \varepsilon$$

och beviset är klart.

1.3 Några räkneregler för gränsvärde och kontinuitet

Antag att $f(x) \rightarrow A$ och $g(x) \rightarrow B$, då $x \rightarrow a$. Då gäller

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &\rightarrow A + B \\ c f(x) &\rightarrow c A \\ f(x) \cdot g(x) &\rightarrow AB \\ \frac{f(x)}{g(x)} &\rightarrow \frac{A}{B}, \text{ om } B \neq 0 \\ f(g(x)) &\rightarrow f(B) \end{aligned} \quad \text{då } x \rightarrow a \quad (1)$$

Ex 1.2 Beräkna gränsvärdet av $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, då $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 3$, $x \rightarrow -1$.

Lösning

- $f(x) \rightarrow 0$, då $x \rightarrow \infty$.
- $f(x) \rightarrow f(3) = 1/2$, då $x \rightarrow 3$
- $f(x) \rightarrow \infty$, då $x \rightarrow -1_+$.

1.4 Asymptot

Vi har tidigare talat om lodrät asymptot. Den har formen $x = a$ eller mer exakt som mängd $\{(x, y) : x = a\}$. Ex.vis har $h(x) = \frac{3}{x+2}$ den lodräta asymptoten $x = -2$.

Den har även den sneda symptomen $y = 0$.

Definition:

Funktionen $f(x)$ har den sneda asymptoten $y = kx + m$, då $x \rightarrow \infty$ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett x_0 , sådant att

$$x > x_0 \implies |f(x) - (kx + m)| < \varepsilon.$$

Ex 1.3 Bestäm den sneda asymptoten till

1. $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.
2. $g(x) = \frac{2x^2-1}{x+1}$
3. $h(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x}$

Lösning

1.

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1} \rightarrow 2 \text{ då } x \rightarrow \pm\infty.$$

Alltså är $y = 2$ sned asymptot (både i $-\infty$ och ∞).

2.

$$g(x) = \frac{2x^2-1}{x+1} = 2x - 2 + \frac{1}{x+1}.$$

Sned asymptot är $y = 2x - 2$.

3.

$$h(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x} = \frac{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{2+1/x^2}}{x} = \frac{|x|\sqrt{2+1/x^2}}{x}.$$

Om $x > 0$, d.v.s. $x \rightarrow \infty$, så gäller att $h(x) \rightarrow \sqrt{2}$. P.s.s. om $x < 0$, d.v.s. $x \rightarrow -\infty$, så gäller att $h(x) \rightarrow -\sqrt{2}$.

■ Vi ser att vi får en sned asymptot $y = kx + m$ med $k \neq 0$ om tau har en rationell funktion med en grad högre på tälj. än nämn, och då m.h.a.

Det blir lite svårare i nästa exempel.

Ex 1.4 Bestäm asymptoterna till $r(x) = \frac{\sqrt{x^4+1}}{x}$.

Lösning

Vi börja med en eventuell sned asymptot $y = kx + m$.

(i) k :

Eftersom $\sqrt{x^4} = x^2$ är det troligt att $r(x) \approx kx + m$. Vi dividerar med x :

$$\frac{r(x)}{x} \approx k + \frac{m}{x}$$

Där vi låter $x \rightarrow \infty$. Då får vi k . För att se att ovanstående fungerar skriver vi om täljaren

$$\sqrt{x^4 + 1} = \sqrt{x^4} \cdot \sqrt{1 + 1/x^4} = x^2 \sqrt{1 + 1/x^4}.$$

$$\frac{r(x)}{x} = \sqrt{1 + 1/x^4} \rightarrow 1 \text{ då } x \rightarrow \pm\infty.$$

(ii) m :

$$r(x) - kx \approx m \text{ om } |x| \text{ stort.}$$

Alltså skriv om

$$\begin{aligned} r(x) - x &= x\sqrt{1 + 1/x^4} - x = x(\sqrt{1 + 1/x^4} - 1) = \frac{x(1 + 1/x^4 - 1)}{\sqrt{1 + 1/x^4} + 1} = \\ &= \frac{1}{x^3(\sqrt{1 + 1/x^4} + 1)} \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow \pm\infty \end{aligned}$$

Svar: Därmed existerar m och $m = 0$. Sned asymptot är $y = x$.
Lodrät asymptot är $x = 0$.

- Växande och avtagande funktion:

Definition

En funktion $f(x)$ definierad på ett intervall är växande ,

$$x < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2).$$

Funktionen är avtagande om $-f(x)$ är växande. Med

$$f(x_1) \leq f(x_2) \text{ utbytt mot } f(x_1) < f(x_2)$$

är $f(x)$ strängt växande.

Ex Visa att $f(x) = x^3$ är strängt växande.

Lösning

Tag $x_1 < x_2$.

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2).$$

Nu är den första faktorn i HL > 0 . Den andra faktorn är också > 0 , något som man inser om man kvadratkompletterar det.
