

Föreläsning IV

Gränsvärde och kontinuitet, forts

Vi utvecklar gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}. \quad (1)$$

Detta gränsvärde hänger ihop med derivata av exponentialfunktion $f_a(x) = a^x$.

Riktningskoefficienten för kurvans tangent i $(x_0, y_0) = (0, 1)$ är 1 för endast ett värde på basen $a = e$.

För att bestämma värdet på e måste vi introducera begreppet derivata som en tangents riktningskoefficient.

För talet $a = e$ blir (1)

$$1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Byt $h = \ln(x + 1)$. Då gäller $h \rightarrow 0 \iff x \rightarrow 0$. Vidare får vi $e^h - 1 = x$, så att gränsvärdet kan skrivas

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x + 1)} \iff 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)}{x}$$

Nu är

$$\frac{\ln(x + 1)}{x} = \ln[(1 + x)^{1/x}]$$

Vi tar nu e upphöjt till VL och HL:

$$e^1 = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}.$$

Även bytet $x = 1/n$ görs och vi får

$$e = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} (1 + 1/n)^n.$$

Genom att sätta in ett stort, ex.vis, positivt n får vi e approximativt.

n	$(1 + 1/n)^n$
10	2.59374
100	2.70481
1000	2.71692
10000	2.71815
100000	2.71827
1000000	2.71828

Ex 1.19 Beräkna gränsvärdena

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \tan x} \text{ och } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x \tan x}.$$

Ex 1.20 Beräkna gränsvärdena

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x \sin x}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x \sin x}$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{3/x}.$$

Lösning

1.

$$\frac{\sinh x}{x} = \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot e^{-x} \rightarrow 1 \cdot 1 = 1 \text{ då } x \rightarrow 0.$$

2.

$$\frac{\cos x - 1}{x \sin x} = -\frac{2 \sin^2(x/2)}{x \sin x} = -\left[\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right]^2 \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow -1^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

då $x \rightarrow 0$.

3.

$$\frac{\cosh x - 1}{x \sin x} \cdot \frac{\cosh x + 1}{\cosh x + 1} = \frac{\sinh^2 x}{x \sin x \cdot (\cosh x + 1)} =$$

$$\frac{\sinh^2 x}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cosh x + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

då $x \rightarrow 0$. Obs! Vi kan göra samma typ av förlängning i 2.

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{3/x}.$$

Lösning

Byt $x = 1/n$. Då får vi $n \rightarrow \pm\infty$.

$$(1 - 2x)^{3/x} = (1 + 1/(-n/2))^{3n} = [(1 + 1/(-n/2))^{-n/2}]^{-6} \implies$$

$$e^{-6} \text{ då } n \rightarrow \pm\infty.$$

Satsen om största och minsta värde liksom satsen om mellanliggande värde nämndes lite svagt inledningsvis. Den säger att för en kontinuerlig funktion $g(x)$ på ett *slutet och begränsat intervall* ett sk. *kompakt intervall*, $[a, b]$ antar f ett största och minsta värde samt alla värden däremellan.

Ex 1.21 Funktionen $g(x) = \cos x$ är kontinuerlig på ex.vis och $[0, \pi]$. $g(0) = 1$ och $g(\pi) = -1$, som faktiskt är största resp. minsta värde. Det finns minst (exakt ett) x för varje $y : -1 \leq y \leq 1$, sådant att $\cos x = y$. Eftersom det finns exakt ett x för varje y har $y = \cos x$ invers. Inversen kallas "arccos".

Ex 1.22 Visa att $f(x) := x^3 - 3x + 2$ har (minst) ett nollställe i intervallet $[-4, 4]$.

Lösning

f är kontinuerlig inte bara på $[-4, 4]$. Vi har ingen "p - q" formel för en tredjegrads ekvation men $f(-3) = -16 < 0$ och $f(0) = 2 > 0$, så att för $x : -3 < x < 0$ finns minst ett nollställe.

Nu kan man lätt se att $f(-2) = 0$ och $f(1) = 0$ (det andra är ett dubbelt nollställe). Vi får därmed också faktoruppdelningen av $f(x)$:

$$f(x) = (x + 2)(x - 1)^2.$$