

Lösningförslag till Tentamen i matematisk analys, L9MA20/LGMA20, 20190107, f.m.

Betyg U: 0-10.5 p, betyg G: 11.0-17.5, betyg 5: 18.0 p och uppåt.
 Bonuspoäng: Från VT 2018, LP4

1. Beräkna gränsvärdena

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 13x + 6}{2x^2 - 5x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - 13/x + 6/x^2}{2 - 5/x + 3/x^2} = 3,$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 3/2} \frac{6x^2 - 13x + 6}{2x^2 - 5x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3/2} \frac{3x - 2}{x - 1} = 5.$$

(c)

$$\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{-x/(\ln 2)} = \left(\frac{1}{[1 + 2/x]^{x/2}}\right)^{\ln 2/2} \rightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^{\ln 2/2} = \frac{1}{4}, \text{ då } x \rightarrow -\infty.$$

1.0p+1.5p+2.0p

2. (a) Derivera funktionen...

$$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3 + 1}$$

(b) Derivera funktionen...

$$g'(x) = e^{ax}(a^2 \sin(bx) - ab \cos(bx) + ab \cos(bx) + b^2 \cos(bx)) = e^{ax}(a^2 + b^2) \sin bx$$

(c) Derivera funktionen...

$$h'(x) = \frac{1}{1 + \sin^2 x} \cos x = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}.$$

1.0p+1.5p+2.0p

3. Beräkna integralerna...

(a)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \arctan x \, dx = 0$$

ty udda integrand och symmetriskt intervall.

(b)

$$\int 3x\sqrt{x^2 + 1} \, dx = (x^2 + 1)^{3/2} + C$$

(c)

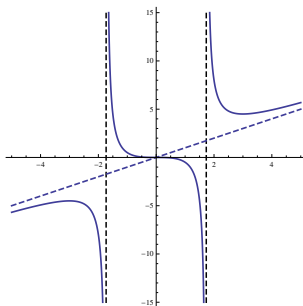
$$\int_1^{e^\pi} \frac{2 \ln x}{x} \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} \ln x = t & x = e^t \implies dx = e^t dt. \\ x - \text{gränser} & 1 \leq x \leq e^\pi \\ t - \text{gränser} & 0 \leq t \leq \pi \end{array} \right\} = \int_0^\pi 2t \, dt = \pi^2.$$

0.5p+1.0p+1.5p

4. Givet kurvan $y = \frac{x^3}{x^2 - 3} =: f(x)$. Konstruera med angivande av definitionsmängd, stationära punkter och asymptoter...

$$D_f = \{x : x \neq \pm\sqrt{3}\}, \quad f(x) = x + \frac{3x}{x^2 - 3}, \quad f'(x) = \frac{x^2(x-3)(x+3)}{(x^2-3)^2}.$$

x	<	-3	<	$-\sqrt{3}$	<	0	<	$\sqrt{3}$	<	3	<
$f'(x)$	+	0	-	ej. exist.	-	0	-	ej exist.	-	0	+
$f(x)$	↗	-9/2	↘	ej exist.	↘	0	↘	ej exist.	↘	9/2	↗



$D_f = \{x : x \neq \pm\sqrt{3}\}$, lok minpkt $(3, 9/2)$, lok. maxpkt $(-3, -9/2)$, terrasspkt $(0, 0)$.
 Lodrät asymptot $x = \pm\sqrt{3}$, sned asymptot $y = x$, $f'(x) = 0 \iff x = 0$, $x = \pm 3$.

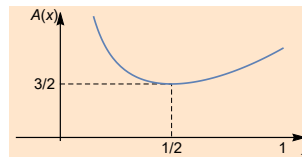
3.0p

5.

Rätblockets volym är $1/6 = 2x^2y \iff y = \frac{1}{12x^2}$ och
 area $A = 2x^2 + 6xy$. Således är

$$A = 2x^2 + 6x \cdot \frac{1}{12x^2} = 2x^2 + \frac{1}{2x} =: f(x)$$

$$\implies f'(x) = 4x - \frac{1}{2x^2}.$$



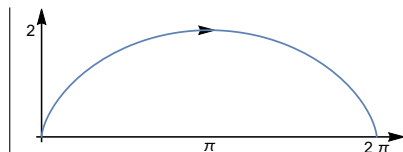
$$f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}. \quad f(1/2) = A_{\min} = \frac{3}{2} \text{ med mått } x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{3}$$

3.0p

6. $\mathbf{r}(t) := (t - \sin t, 1 - \cos t) \implies \mathbf{r}'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$.

(a)

Eftersom $y(t) = 1 - \cos t$ har sitt största värde då $t = \pi$; $\mathbf{r}(\pi) = (\pi, 2)$, $\mathbf{r}(0) = (0, 0)$ och $\mathbf{r}(2\pi) = (0, 2\pi)$, så är kurvans utseende i stort sett, som i figuren t.h.



0.5p

(b) Kurvans längd är

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2(t/2)} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin(t/2) dt = 8.$$

2.5p

7. Formulera och bevisa Integralkalkylens medelvärdessats: Antag att $f(x)$ är kontinuerlig i intervallet $[a, b]$, $a < b$. Då finns en punkt $\xi : a < \xi < b$, sådan att

$$f(\xi)(b - a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Bevis:

Enligt Satsen om minsta och största värde, existerar f_{\min} och f_{\max} . Då är

$$(b - a)f_{\min} \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b - a)f_{\max} \text{ eller } f_{\min} \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx =: y \leq f_{\max}.$$

Enligt Satsen om mellanliggande värde finns $\xi \in [a, b]$, sådant att $f(\xi) = y$, d.v.s.

$$f(\xi) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \text{ eller ekvivalent } (b - a)f(\xi) = \int_a^b f(x) dx$$

V.S.B.

3.0p