

1 Föreläsning IX, tillämpning av integral

1.1 Volym av några kroppar

1.1.1 Skiv- och skalmetoderna, m.m.

Vi kan tänka oss en limpa (bröd) som längsledes är genomborrad av x -axeln, $a \leq x \leq b$. Limpan skivas i n lika tjocka skivor, alltså med tjocklek $\Delta x := \frac{b-a}{n}$. Vi får en uppdelning av intervallet $[a, b]$ i n lika långa (tjocka) delintervall med ändpunkter x_{j-1} och x_j , $j = 1, 2, \dots, n$. Varje skivas area är $A(x_j)$, där x_j är, ex.vis, mittpunkten ξ_j i intervallet $[x_{j-1}, x_j]$. Limpans volym är därmed approximativt

$$V \approx \sum_{j=1}^n A(\xi_j) \Delta x.$$

Vi går direkt över till integral och får exakt

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

Vi behandlar endast fallet då $A(x)$ är arean av en cirkelskiva.

Ex: Betrakta kurvan $y = f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

- (a) Vi betraktar ytan, som begränsas av $y = f(x)$, $y = 0$ där $0 \leq x \leq 4$. Denna yta roterar kring x -axeln och genererar en rotationskropp. Beräkna kroppens volym.

Lösning

$A(x) = \pi f(x)^2$, så volymen är då

$$V = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi.$$

- (b) I denna kropp borrar man ett (cirkulärt) hål längs symmetriaxeln (x -axeln) som hålets centrum. Cylinderhålet radie är 1. Beräkna den återstående volymen av rotationskroppen.

Lösning

Hålet kommer att göra att rotationskroppen blir av med den del där $0 \leq x \leq 1$. Vi beräknar volymen av den del som återstår:

$$V_1 := \pi \int_1^4 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^4 = \frac{15\pi}{2}.$$

Från en subtraherar vi volymen av cylindern, som är

$$V_c := \pi \int_1^4 1^2 dx = \pi [x]_1^4 = 3\pi.$$

Sökt volym är alltså $V_1 - V_c = \frac{9\pi}{2}$.

Ex: Vi beräkna volymen i föregående exempel (b) genom att "skala" kroppen i cylinderskal. Det görs nu m.a.p. y -axeln. Vi har att $x = f^{-1}(y) = y^2$. Ett skals volym är

$$dV := 2\pi y(4-x)dy \text{ där } 1 \leq y \leq 2 \text{ och } x = y^2.$$

Totala sökta volymen är

$$V = 2\pi \int_1^2 (4y - y^3) dy = 2\pi \left[2y^2 - \frac{y^4}{4} \right]_1^2 = \frac{9\pi}{2}.$$

-
- Metoderna kallas skiv- respektive skalmetoden.

1.2 Ytas area och kurvlängd

Ex: Beräkna mantelytans area av kroppen i det första exemplet (a).

Lösning

Vi behöver en infinitesimal area dA . Vi kan ta kurvan $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$, som sedan roteras kring x -axeln. En infinitesimal del av kurvan har längden

$$dS := \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Detta ger en infinitesimal remsa med area (där omkretsen är $2\pi y$)

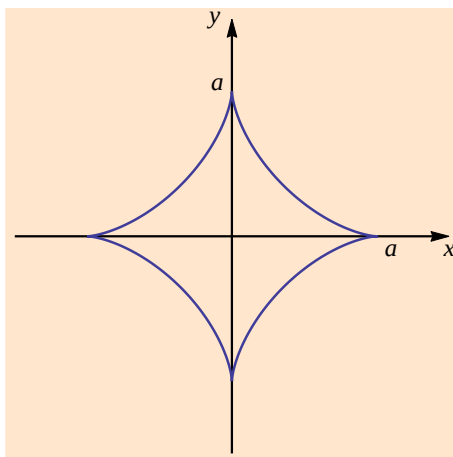
$$\begin{aligned} dA &= 2\pi y dS = 2\pi \sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx \Leftarrow A = 2\pi \int_0^4 \sqrt{1/4 + x} dx = \\ &= \frac{4\pi}{3} \left[(1/4 + x)^{3/2} \right]_0^4 = \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 1) \text{ a.e..} \end{aligned}$$

Ex: Vi kan också beräkna längden L av kurvan $y = f(x)$ genom att bara integrera

$$L = \int_{x=0}^4 dS = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx.$$

Integralen är lite komplicerad att beräkna men inte helt omöjlig.

Ex: En *astroid* är en kurva som ges av $t \mapsto a(\cos^3 t, \sin^3 t)$, $a > 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$.



(a) Beräkna längden av astroiden.

Lösning

$$\begin{aligned} L &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{(3\cos^2 t(-\sin t))^2 + (3\sin^2 t(\cos t))^2} dt = \\ &= 12a \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} dt = 12a \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = 3[\cos 2t]_{\pi/2}^0 = 6a \text{ l.e.} \end{aligned}$$

Kommentar: Längden av cirkeln med radie a är $2\pi a > 6a$.

(b) Beräkna arean som begränsas av kurvan.

Lösning

Med arean som A är

$$\frac{A}{4} = \int_{1:\text{a kvadr.}} g(x) dx$$

där kurvan i första kvadrant beskrivs av $y = g(x)$. Vi sätter $y = g(x) = a \sin^3 t$ och $x = a \cos^3 t$. Detta är en V.S. med $dx = 3a \cos^2 t (-\sin t) dt$ och t -gränser $\alpha = \pi/2$ och $\beta = 0$.

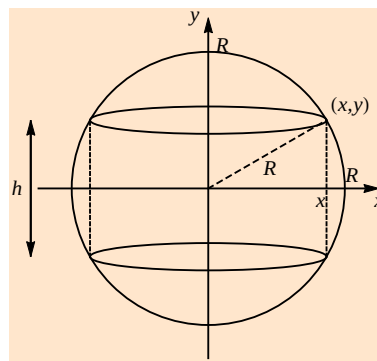
$$\frac{A}{4} = 3a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \cdot \sin^4 t dt = 3a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \cdot \sin^2 t dt, \text{ av symmetriskäl.}$$

Alltså är

$$\frac{A}{2} = 3a^2 \int_0^{\pi/2} (\sin t \cdot \cos t)^2 dt = \frac{3a^2}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \frac{3a^2}{8} \left[t - \frac{1}{4} \cos 4t \right]_0^{\pi/2} = \frac{3a^2 \pi}{16}$$

1.3 Rotation och Tröghetsmoment

Ex: Vilken rörelseenergi har ett klot som roterar kring sin symmetriaxel? Vi antar att densiteten är konstant ρ , radien är R och att vinkelhastigheten är ω .



y -koordinaten i punkten (x, y) uppfyller $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Lösning

En kropp med massa dm radien r vinkelrät mot rotationsaxeln som symmetriaxel har konstant hastighet $v = \omega \cdot r$, massan $dm = 2\pi r \cdot h \cdot dr \rho$ och alltså rörelseenergin $dW_k = \frac{1}{2} dm \cdot v^2$, där $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$. Totala W_k fås genom att integrera:

$$W_k = \int_{r=0}^R dW_k = \frac{8}{15} \pi \omega^2 R^5 \rho.$$

Nu uttrycker vi W_k med klotets massa

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} R^3.$$

$$W_k = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 \cdot \frac{2}{5} \cdot R^2 \omega^2 = \underbrace{\frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2}_{\text{Tröghetsmoment}} \cdot \omega^2.$$

Detta är alltså tröghetsmomentet för ett klot med konstant densitet och radie R .

Kommentarer Olika kroppar har olika tröghetsmoment. Som övning kan man beräkna en rak cirkulär kons tröghetsmoment med konstant densitet.

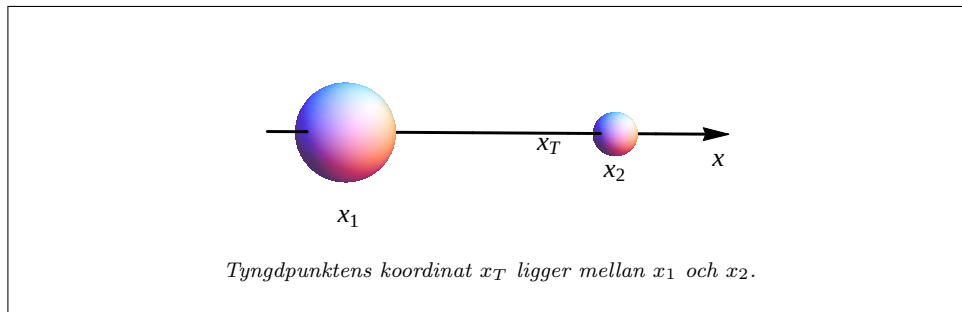
1.4 Sammanfattning av formler

Skiv- och skalmetoden avser rotationskropp.

$$\begin{aligned}\text{Skivmetoden:} \quad V &= \int_{x=a}^b A(x) dx = \pi \int_a^b f(x)^2 dx \\ \text{Skalmetoden:} \quad V &= 2\pi \int_a^b (b-x)|f(x)|f'(x) dx^{(*)} \\ \text{Kurv­längd:} \quad L &= \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} dx \\ \text{Mantelytas area:} \quad A &= \int_a^b 2\pi|f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2} dx\end{aligned}\tag{1}$$

(*) Denna formel modifieras beroende på det specifika fallet.

1.5 Tyngdpunkt/masscentrum m.m.



Tyngdpunkt för två klot: Vi antar att de två kloten har tyngdpunkt i x_1 respektive x_2 med massor m_1 respektive m_2 med tyngdpunkts x_T . För denna koordinat är det balans mellan vänster och höger kraftmoment, alltså

$$M_1 := (x_T - x_1)m_1 = (x_2 - x_T)m_2 = M_2 \iff x_T = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}.$$

n punktmassor: Tyngdpunkt för n punktmassor med vardera massa Δm_k i punkterna x_k , $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ är

$$x_T = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \cdot \Delta m_k}{m_0} \quad \text{där} \quad m_0 = \sum_{k=1}^n \Delta m_k.$$

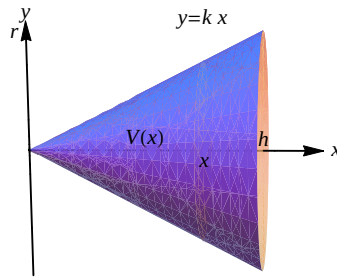
kont. utbredd kropp: Eller för kontinuerligt utbredd massa längs x -axeln, $a \leq x \leq b$:

$$x_T = \frac{\int_{x=a}^b x \, dm}{m_0}.\tag{2}$$

Ex: Givet en rak cirkulär kon med radie r och höjd h .

- (a) Beräkna konens volym uttryckt i r och h .
- (b) Givet att konen har konstant densitet ρ , bestäm koordinaten för dess tyngdpunkt.
- (c) Beräkna mantelytans area.

Lösning



- (a) Konens volym uttryckt i r och h : Vi låter konens symmetriaxel vara x -axeln. En ekvation för en av generatriserna är $y = kx = \frac{r}{h}x =: f(x)$. M.h.a. skivmetoden (skivformeln) får vi volymen V_0 till

$$V_0 = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h} x \right)^2 dx = \frac{1}{3} \pi h r^2.$$

- (b) Givet att konen har konstant densitet ρ . y -koordinaten för dess tyngdpunkt är $y = y_T = 0$, p.g.a. symmetri. Vi har bara formeln (2) och behöver göra en V.S. från m till x . Vi ser $m = m(x)$, d.v.s. m som funktion av x där $m(x) = \rho V(x)$. $V(x)$ är volymen av konen med höjd x , $0 \leq x \leq h$. Denna kon har radie $\frac{r}{h}x$. Alltså är

$$V(x) = \pi \cdot \left(\frac{r}{h} \right)^2 \frac{x^3}{3} \text{ och således } m = m(x) = \rho \cdot V(x) = \rho \cdot \pi \cdot \left(\frac{r}{h} \right)^2 \frac{x^3}{3}.$$

Vi differentierar:

$$dm = \rho \cdot \pi \cdot \left(\frac{r}{h} \right)^2 x^2 dx.$$

Täljaren i (2) är

$$\int_{x=0}^h x dm = \int_0^h \rho \cdot \pi \cdot \left(\frac{r}{h} \right)^2 x^3 dx = \rho \cdot \pi \cdot \left(\frac{r}{h} \right)^2 \cdot \frac{h^4}{4} = \rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{h^2}{4}.$$

Nämnamaren är

$$m_0 = m(h) = \rho \cdot \pi \cdot \frac{r^2 h}{3}.$$

Således är

$$x_T = \frac{\rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{h^2}{4}}{\rho \cdot \pi \cdot \frac{r^2 h}{3}} = \frac{3}{4} h,$$

d.v.s. $1/4$ av höjden från bottenplattan.

- (c) Beräkna mantelytans area A ...

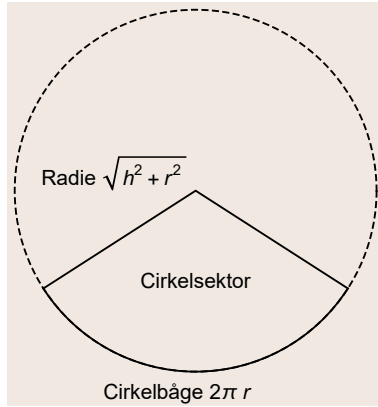
$$A = \int_{x=0}^h 2\pi y dS \text{ där } y = f(x) = \frac{r}{h}x \text{ och } dS = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Nu är $f'(x) = \frac{r}{h}$. Alltså är

$$A = 2\pi \sqrt{1 + (r/h)^2} \int_0^h \frac{r}{h} x dx = \pi r \sqrt{h^2 + r^2}.$$

Kommentar: Man kan klippa upp konen längs en generatris och få en cirkelsektor med radie $\sqrt{h^2 + r^2}$ och med cirkelbåge $2\pi r$. En sådan cirkelsektors area är just

$$A = \frac{2\pi r \cdot \sqrt{h^2 + r^2}}{2} = \pi r \sqrt{h^2 + r^2}.$$



Cirkelsektor med radie $\sqrt{h^2 + r^2}$ och cirkelbåge $2\pi r$.