Lösningsförslag till Tentamen i matematisk analys för högstadie - och gymnasielärare på Göteborgs universitet, L9MA20/LGMA20, 20170103, 14.00-18.00

1. Beräkna följande gränsvärden

   (a)
$$\lim_{x\to 3}\frac{6-2x}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 3}\frac{-2(x-3)}{2(x-3)(x-1)}=-1.$$

   (b)
$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x \lim_{x\to\infty}\left[\left(10+\frac{1}{(-x/3)}\right)^{-3/x}\right]^{(-3)}=e^{-3}.$$

   (c)
$$\lim_{x\to 3}\arctan\left(\frac{6-2x}{x^2-4x+3}\right)=-\frac{\pi}{4}\text{ enligt (a).}$$

$1.0\text{p}, 2.0\text{p}, 1.5\text{p}$

2. Beräkna följande integraler...

   (a)
$$\int_0^5\frac{1}{3x+1}\,dx=\left[\frac{1}{3}l(3x+1)\right]_0^5=\frac{\ln 16}{3}=\frac{4\ln 2}{3}.$$

   (b)
$$\int_0^\pi \sin^2 x\,dx=\int_0^\pi\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^\pi=\frac{\pi}{2}.$$

   (c)
$$\int\tan^2 x\,dx=\int(\tan^2 x+1-1)dx=\tan x-x+C.$$

$1.0\text{p}, 2.0\text{p}, 1.5\text{p}$

3. (a) Konstruera kurvan $y=\dfrac{\ln x}{x}=:f(x)$...

   Lösning

   - $D_f=\{x : x>0\}=\mathbb{R}_+$.
   - $f(x)\longrightarrow-\infty$, då $x\longrightarrow 0_+$ och $f(x)\longrightarrow 0$, då $x\longrightarrow\infty$. Alltså är $x=0$ en lodrät asymptot.
   - Sned asymptot: $y=0$.
   - Stationära punkter:
$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=0\Longleftrightarrow x=e$$

   Lokal maxpkt är $(x_0,y_0)=(e,1/e)$. 3.0p

   (b) Andraderivatan $f''(x)=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$, som är >0 för $x>e^{3/2}$ och >0 för $0<x<e^{3/2}$.
   Alltså maxpunkt i $x_0=e$.
   Kurvan är konkav för $0<x\le e^{3/2}$ respektive konvex för $x\ge e^{3/2}$. 1.0p

4. Givet ytan som begränsas av $y=\dfrac{\ln x}{x}$, $y=0$, samt linjerna $x=1$ och $x=a$.

   (a) Beräkna volymen som genereras då ytan, som begränsas av ytan ovan roterar kring $x-$axeln med $a=e$...
$$\int\left[\frac{\ln x}{x}\right]^2dx=\{\text{V.S. }\ln x=t\}=\int t^2e^{-t}dt=C-e^{-t}(t^2+2t+2)=C-x((\ln x)^2+2\ln x+2).$$

   I a) får vi
$$\pi\int\left[\frac{\ln x}{x}\right]^2dx=\pi\left[x((\ln x)^2+2\ln x+2)\right]_e^1=2\pi-\frac{5\pi}{e}$$

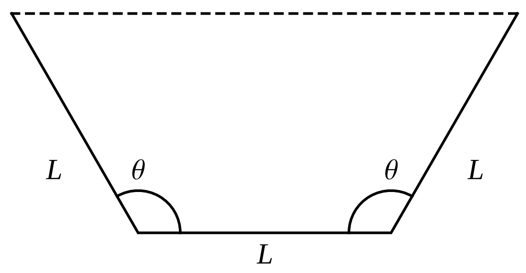
3.0p

(b) Volymen som genereras då ytan, som begränsas av ytan ovan roterar kring $x-$axeln med $a = \infty$ är

$$\pi \lim_{b\to\infty} \left[x((\ln x)^2 + 2\ln x + 2)\right]_b^1 = 2\pi.$$

1.0p

5. Givet en yta som begränsas av fyra linjer, enligt figur.



Beräkna vinkeln θ, så att ytans area A blir så stor som möjligt och uttryck den maximala arean i sidolängden L...

Lösning

$$A = L^2(\cos(\theta - \pi/2)\sin(\theta - \pi/2) + \cos(\theta - \pi/2)) =: f(\theta), \quad D_f = [0, \pi].$$

$$\begin{aligned} f(\theta) &= L^2 \sin\theta(1 - \cos\theta) = L^2(\sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta) \Longrightarrow \\ f'(\theta) &= \cos\theta - \cos 2\theta = \cos\theta - 2\cos^2\theta + 1. \end{aligned}$$

Sätt $\cos\theta = t$ och vi får andragradsekvationen

$$2t^2 - t - 1 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1/2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = 2\pi/3 \end{cases}$$

Maximum erhålls då $\theta = 2\pi/3$ och då är

$$A_{\max} = f(2\pi/3) = \frac{3\sqrt{3}L^2}{4}.$$

3.0p

6. (a) En formel för partiell integration av obestämd integral:

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx \text{ där } F'(x) = f(x).$$

2.0p

(b) Bevisa formeln i (a): Vi deriverar båda sidor och visar att derivatorna är lika.

$$\text{VL: } f(x)g(x), \quad \text{HL: } F(x)g'(x) + f(x)g(x) - F(x)g'(x) = f(x)g(x).$$

2.0p

Maximal poäng på tentamen är 24.0 p. Låt P vara erhållen poängsumma och B erhållen bonuspoäng.
Betyg U (underkänt), om $P + B < 11.0$.
Betyg G (godkänt), om $11.0 \le P + B < 18.0$.
Betyg VG (väl godkänd), om $18.0 \le P + B$.