Lösningsförslag till Tentamen i matematisk analys, L9MA20/LGMA20, 20190107, f.m.

	Betyg U: 0-10.5 p, betyg G: 11.0-17.5, betyg 5: 18.0 p och uppåt.
Bonuspoäng:	Från VT 2018, LP4

1. Beräkna gränsvärdena

   (a) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-13x+6}{2x^2-5x+3}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{6-13/x+6/x^2}{2-5/x+3/x^2}=3,$

   (b)
$$\lim_{x\to 3/2}\frac{6x^2-13x+6}{2x^2-5x+3}=\lim_{x\to 3/2}\frac{3x-2}{x-1}=5.$$

   (c)
$$\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-x/(\ln 2)}=\left(\frac{1}{[1+2/x]^{x/2}}\right)^{\ln 2/2}\longrightarrow\left(\frac{1}{e}\right)^{\ln 2/2}=\frac{1}{4},\text{ då } x\to-\infty.$$

1.0p+1.5p+2.0p

2. (a) Derivera funktionen...
$$f'(x)=\frac{3x^2}{x^3+1}$$

   (b) Derivera funktionen...
$$g'(x)=e^{ax}(a^2\sin(bx)-ab\cos(bx)+ab\cos(bx)+b^2\cos(bx))=e^{ax}(a^2+b^2)\sin bx$$

   (c) Derivera funktionen...
$$h'(x)=\frac{1}{1+\sin^2 x}\cos x=\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}.$$

1.0p+1.5p+2.0p

3. Beräkna integralerna...

   (a)
$$\int_{-\pi}^{\pi}\arctan x\,dx=0$$
   ty udda integrand och symmetriskt intervall.

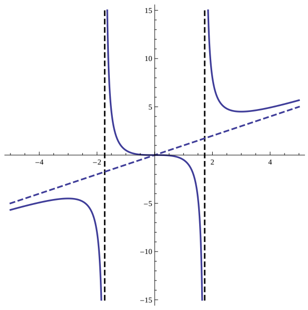
   (b)
$$\int 3x\sqrt{x^2+1}\,dx=(x^2+1)^{3/2}+C$$

   (c)
$$\int_1^{e^\pi}\frac{2\ln x}{x}\,dx=\left\{\begin{array}{lll}\ln x=t & x=e^t & \Longrightarrow dx=e^t dt.\\ x-\text{gränser} & & 1\le x\le e^\pi\\ t-\text{gränser} & & 0\le t\le\pi\end{array}\right\}=\int_0^\pi 2t\,dt=\pi^2.$$

0.5p+1.0p+1.5p

4. Givet kurvan $y=\dfrac{x^3}{x^2-3}=:f(x)$. Konstruera med angivande av definitionsmängd, stationära punkter och asymptoter...
$$D_f=\{x:x\neq\pm\sqrt{3}\},\quad f(x)=x+\frac{3x}{x^2-3},\quad f'(x)=\frac{x^2(x-3)(x+3)}{(x^2-3)^2}.$$

x	$<$	-3	$<$	$-\sqrt{3}$	$<$	0	$<$	$\sqrt{3}$	$<$	3	$<$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	ej. exist.	$-$	0	$-$	ej exist.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-9/2$	$\searrow$	ej exist.	$\searrow$	0	$\searrow$	ej exist.	$\searrow$	$9/2$	$\nearrow$

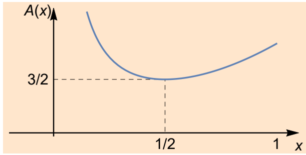


$D_f = \{x : x \neq \pm\sqrt{3}\}$, lok minpkt $(3, 9/2)$, lok. maxpkt $(-3, -9/2)$, terrasspkt $(0, 0)$. Lodrät asymptot $x = \pm\sqrt{3}$, sned asymptot $y = x$, $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \quad x = \pm 3$.

3.0p

5.

Rätblockets volym är $1/6 = 2x^2 y \Longleftrightarrow y = \dfrac{1}{12x^2}$ och area $A = 2x^2 + 6xy$. Således är



$$
\begin{aligned}
A &= 2x^2 + 6x \cdot \frac{1}{12x^2} = 2x^2 + \frac{1}{2x} =: f(x) \\
\Longrightarrow & \quad f'(x) = 4x - \frac{1}{2x^2}.
\end{aligned}
$$

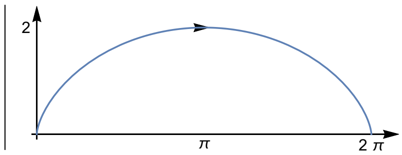
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$. $f(1/2) = A_{\min} = \dfrac{3}{2}$ med mått $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{1}{3}$

3.0p

6. $\boldsymbol{r}(t) := (t - \sin t, 1 - \cos t) \Longrightarrow \boldsymbol{r}'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$.

(a)

Eftersom $y(t) = 1 - \cos t$ har sitt största värde då $t = \pi$; $\boldsymbol{r}(\pi) = (\pi, 2)$, $\boldsymbol{r}(0) = (0, 0)$ och $\boldsymbol{r}(2\pi) = (0, 2\pi)$, så är kurvans utseende i stort sett, som i figuren t.h.



0.5p

(b) Kurvans längd är

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = \\
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2(t/2)} = 2 \int_0^{2\pi} \sin(t/2) dt = 8.
\end{aligned}
$$

2.5p

7. Formulera och bevisa Integralkalkylens medelvärdessats: Antag att $f(x)$ är kontinueriig i intervallet $[a, b]$, $a < b$. Då finns en punkt $\xi : a < \xi < b$, sådan att

$$f(\xi)(b - a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Bevis:

Enligt Satsen om minsta och största värde, existerar $f_{\min}$ och $f_{\max}$. Då är

$$(b - a) f_{\min} \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b - a) f_{\max} \text{ eller } f_{\min} \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx =: y \leq f_{\max}.$$

Enllgt Satsen om mellanliggande värde finns $\xi \in [a, b]$, sådant att $f(\xi) = y$, d.v.s.

$$f(\xi) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \text{ elle ekvivalent } (b - a) f'(\xi) = \int_a^b f(x) dx$$

V.S.B.

3.0p