Tentamen i matematik, Kurs L9MA20/LGMA20, 20190607, fredag f.m. 08.30-12.30

1. Beräkna följande gränsvärden...

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\pi x)}{x^2} = \frac{\pi^2}{2}$, (b) $\lim_{x\to -5/2} \frac{6x^2+5x-25}{x(2x+5)} = 5$, (c) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n/6} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

   1.0+1.0+1.0

2. Beräkna följande funktioners derivata

   $$\text{(a) } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \text{(b) } g'(x) = 1 - e^x \frac{e^x+1}{=} \frac{1}{e^x+1}$$

   (c) $h(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)\ \tan(x) = \sin x \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sin^2 x \Longrightarrow h'(x) = \sin 2x.$

   1.0+1.0+2.5

3. Beräkna integralerna

   (a) $\int_{-2}^{2}\left(x^5 + \frac{x^3-x}{x^2+1}\right) dx = 0$, dy symmetriskt intervall och udda integrand.

   (b) $\int x\, e^{-2x}\, dx = \{\text{P.I.}\} = \left(-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) e^{-2x} + C.$

   (c)
   $$\int_1^e \frac{\ln t}{t^2}\, dt = \{\text{P.I.}\} = [-lnt/t]_1^e + \int_1^e \frac{1}{t^2} dt = \left[\frac{t+\ln t}{t}\right]_e^1 = 1 - \frac{2}{e}$$

   1.0+1.5+2.0

4. (Konstruera kurvan $y = \frac{x^2}{x^2-4} =: g(x)$ med angivande av asymptoter, lokala max- och minpunkter och terrasspunkter).

   $$D_g = \{x : x \neq \pm 2\}, \quad g'(x) = -\frac{8x}{(x^2-4)^2} = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

   teckenschema:

x	$<$	-2	$<$	0	$<$	2	$<$
$g'(x)$	$+$		$+$	0	$+$		$-$
$g(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$		$\searrow$

   $D_g = \{x : x \neq \pm 2\}$, lokal maxpunkt $(0,0)$ sned asymptot $y = 1$, lodräta asymptoter $x = \pm 2$. 2.5

5. Ytan som begränsas av $y = \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$ och $y = 0$, där $1 \leq x < \infty$ begränsar en yta i planet. Ytan roterar kring $x-$axeln och genererar på så sätt en rotationskropp. Beräkna kroppens volym:

   $$V = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2(x^2+1}\, dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x} - \arctan x\right]_1^b = 1 - \frac{\pi}{4}$$

   3.0

6. Volymen är $V = 36 = 3x^2 y$ med area

   $$A(x) = 8xy + 6x^2 = \frac{96}{x} + 6x^2 \Longrightarrow A'(x) = 12x - \frac{96}{x^2} = 0 \Longleftrightarrow x = 2.$$

   $A(2) = 72\,\text{dm}^2$ med mått $x = 2$, $3x = 6$ och $y = 3$. 3.0

7. (a) Derivera funktionen $f(x) = \sin x$ med derivatans definition m.h.a. gränsvärdet $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1\ldots$

   $$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \{h = 2\delta\} = \frac{\sin(x+\delta+\delta)-\sin(x+\delta-\delta)}{2\delta} = \ldots = \frac{2\cos(x+\delta)\sin\delta}{2\delta} =$$

   $\frac{\sin\delta}{\delta}\cdot\cos(x+\delta) \longrightarrow 1\cdot\cos x$ dÂ $\delta \longrightarrow 0.$

   2.0

   (b) Derivera funktionen $g(x) = \cos x$ utifrån resultatet i (a):

   $$D\cos x = D\sin(\pi/2 - x) = \cos(\pi/2 - x)\cdot(-1) = -\sin x.$$

   1.0

Maximal poäng på tentamen, 24p
Låt x vara poängsumman och b var antal bonuspoäng.
Betyg U (underkänt) om $x + b < 11.0$.
Betyg G om $11.0 \leq x + b < 18.0$.
Betyg VG om $18.0 \leq x + b$.

En trigonometrisk identitet

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta\,. \tag{1}$$

En derivata

$$D\ln(x + \sqrt{x^2 + a}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} \tag{2}$$