Lösningsförlag till Tentamen i matematik, Kurs L9MA20/LGMA20, 20190107, 08.30-12.30

1. Beräkna följande gränsvärden

   (a)
$$\frac{(1-2x)^2}{1+x-6x^2} = \frac{(1-2x)^2}{-(2x-1)(3x+1)} = \frac{1-2x}{3x+1} = \frac{1/x-2}{3+1/x} \longrightarrow -2/3,\ \text{då } x \to \infty.$$

   (b)
$$\frac{(1-2x)^2}{1+x-6x^2} = \{\text{enl. (a)}\} = \frac{1-2x}{3x+1} \Longrightarrow 0,\ \text{då } x \to 1/2.$$

   (c)
$$(1-3/x)^{x/2} = \left[\left(1+\frac{1}{x/(-3)}\right)^{x/(-3)}\right]^{-3/2} \longrightarrow e^{-3/2} \text{ då } x \to \infty.$$

1.0p+1.5p+2.0p

2. (a)
$$f(x) = \tan^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} \Longrightarrow f'(x) = 2\tan x(1+\tan^2 x) + 2(\cos x)^{-3}\cdot(-\sin x) = 2\left[\frac{\sin x}{\cos^3 x} - \frac{\sin x}{\cos^3 x}\right] = 0.$$

   Alltså måste $f(x) = C$ en konstant. Ex.vis $f(0) = -1$, så $f(x) = -1$.

   (b) De stationära punkterna till funktionen $g(x) = x^2\, e^{-x^2}$:
$$g'(x) = e^{-x^2}(2x-2x^3) = -2e^{-x^2}x(x+1)(x-1) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \quad x = \pm 1.$$

   Punkterna är
$$(x_1, y_1) = (-1, 1/e),\ (x_2, y_2) = (0, 0),\ (x_3, y_3) = (1, 1/e).$$

1.5p+1.5p

3. Beräkna integralerna...

   (a)
$$\int_{-2}^{10} \frac{1}{2x+7}\,dx = = \frac{1}{2}\left[\ln(2x+7)\right]_{-2}^{10} = \frac{1}{2}(\ln 27 - \ln 3) =$$
$$= \frac{1}{2}\ln 9 = \frac{1}{2}\ln 3^2 = \ln 3.$$

   (b)
$$\int_0^{\infty} (2x-1)e^{-2x}\,dx = \{\text{P.I.}\} = \lim_{b\to\infty}\left[-xe^{-2x}\right]_0^b = 0.$$

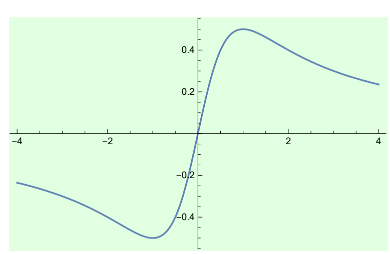
1.0p+1.5p

4. Kontruera kurvan $y = h(x) := \dfrac{x}{x^2+1}\ldots$
   $D_h = \mathbb{R}$.
$$h'(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

   Ingen lodrät asymptot men sned:
$$h(x) = \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x+1/x} \longrightarrow 0 \text{ då } x \longrightarrow \pm\infty.$$

   Alltså är $y = 0$ sned asymptot.

x	$<$	-1	$<$	1	$<$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\searrow$	Lok. min	$\nearrow$	Lok. max	$\searrow$



   Svar: $D_h = \mathbb{R}$, Lokal minpkt $(-1, -1/2)$, lokal maxpkt $(1, 1/2)$, sned asymptot $y = 0$. 3.0p

5. (a) Integranden är y^2 och skrivs

$$y^2 = \frac{1}{x^2(x+1)} = \{\text{PBU}\} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$$

Beräkna Kroppens volym...

$$V_a = \pi \int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)}\, dx = \pi \left[-\frac{1}{x} + \ln(x+1) - \ln x \right]_1^2 = \pi \left(\frac{1}{2} - \ln \left(\frac{4}{3} \right) \right).$$

3.0p

(b) Samma som i (a) men med $1 \leq x < \infty$.

$$V_b = \pi \lim_{c \to \infty} \left[-\frac{1}{x} + \ln(x+1) - \ln x \right]_1^c = \pi \lim_{c \to \infty} \left[-1/c + 1/1 + \ln \left(\frac{1+1/c}{1} \right) - \ln \left(\frac{2}{1} \right) \right] = \pi(1 - \ln 2).$$

1.0p

6.

$$A = A(x) = 2\pi r \cdot h = 2\pi\, x \cdot \sqrt{4-x^2} \Longrightarrow A'(x) = 2\pi\, 1 \cdot \sqrt{4-x^2} + x \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = 2\pi\, \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Endast $x = +\sqrt{2}$ möjlig. $A(\sqrt{2}) = 2\pi\sqrt{2}^2 = 4\pi$, enhet 10^4 m^2. 3.0p

7. (a) Differenskvot är

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x+2\delta) - \cos x}{2\delta} &= -\sin x\, \frac{\sin 2\delta}{2\delta} - \frac{\cos x(1-\cos 2\delta)}{2\delta} = \\ &= -\sin x\, \frac{\sin 2\delta}{2\delta} - \cos x \sin\delta\, \frac{\sin\delta}{2\delta} \longrightarrow -\sin x \cdot 1 - \cos x \cdot 0 \cdot 1/2 = -\sin x. \end{aligned}$$

då $\delta \longrightarrow 0$. 3.0p

(b) Derivatan av funktionen $f(x) = \sin x$ utgående från resultatet i (a).

$$D \sin x = D \cos(\pi/2 - x) = -\sin(\pi/2 - x) \cdot (-1) = \cos x.$$

1.0p

Maximal poäng på tentamen, 24p
Låt p vara poängsumman, erhållen efter rättning, och b antal bonuspoäng.
Betyg U (underkänt) om $p + b < 11.0$.
Betyg G om $11.0 \leq p + b < 18.0$.
Betyg VG om $18.0 \leq p + b$.