1 Föreläsning X, tillämpning av integral

1.1 Volym av några kroppar

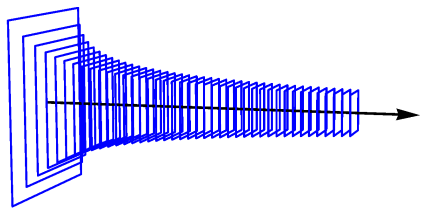
1.1.1 Skiv- och skalmetoderna, m.m.

Vi kan tänka oss en limpa (bröd) som har längsledes är genomborrad av $x-$axen, $a \leq x \leq b$. Limpan skivas i n skivor, med tjocklek Δx_j delintervall med ändpunkter x_{j-1} och x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Varje skivas area är $A(x_j)$, där x_j är, ex.vis, mittpunkten ξ_j i intervallet $[x_{j-1}, x_j]$ med längd $\Delta x_j := x_j - x_{j-1}$. Limpans volym är därmed

$$V \approx \sum_{j=1}^{n} A(\xi_j)\Delta x_j.$$

Vi går direkt över till integral och får exakt

$$V = \int_a^b A(x)dx.$$



Vi behandlar främst fallet då $A(x)$ är arean av en cirkelskiva.

Exempel 10.1

En kropp har en tvärsnittsarea $A(x)$ vinkelrät mot $x-$axeln i punkten x, i form av en liksidig triangel med sidolängd $\dfrac{1}{x+1}$ för $0 \leq x \leq h$.

(a) Beräkna kroppens volym, där höjden $h = 2$,

(b) och där $h = \infty$.

Lösning

(a) Volymen är $V_0 = \displaystyle\int_0^2 \frac{\sqrt{3}}{4(x+1)(x+1)}dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ v.e.

(b) Volymen är $V_1 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{3}}{4(x+1)(x+1)}dx = \lim_{b\to\infty} \frac{\sqrt{3}}{4}\left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^b = \frac{\sqrt{3}}{4}$ v.e.

Exempel 10.2

Betrakta kurvan $y = f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

(a) Vi betraktar ytan, som begränsas av $y = f(x)$, $y = 0$ där $0 \leq x \leq 4$. Denna yta roterar kring $x-$axeln och genererar en rotationskropp. Beräkna kroppens volym.

(b) I denna kropp borrar man ett (cirkulärt) hål längs symmetriaxeln ($x-$axeln) som hålets centrum. Cylinderhålet radie är 1. Beräkna den återstående volymen av rotationskroppen.

Lösning

(a) $A(x) = \pi f(x)^2$, så volymen är då

$$V_0 = \pi \int_0^4 x\,dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi.$$

(b) Hålet kommer att göra att rotationskroppen blir av med den del där $0 \leq x \leq 1$. Vi beräknar volymen av den del som återstår:

$$V_1 := \pi \int_1^4 x\,dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^4 = \frac{15\pi}{2}.$$

Från denna del subtraherar vi volymen av cylinder, med volym

$$V_c := \pi \int_1^4 1^2\,dx = \pi\,[x]_1^4 = 3\pi.$$

Sökt volym är alltså $V_1 - V_c = \dfrac{9\pi}{2} =: V_2$.

Exempel 10.3

Vi beräkna volymen i föregående exempel (b) genom att "skala" kroppen i cylinderskal. Det görs nu m.a.p. $y-$axeln. Vi har att $x = f^{-1}(y) = y^2$. Ett skals volym är

$$dV := 2\pi y(4-x)dy \text{ där } 1 \leq y \leq 2 \text{ och } x = y^2.$$

Totala sökta volymen är

$$V_2 = 2\pi \int_1^2 (4y - y^3)dy = 2\pi \left[2y^2 - \frac{y^4}{4}\right]_1^2 = \frac{9\pi}{2}.$$

Metoderna kallas skiv- respektive skalmetoden.

1.2 Ytas area och kurvlängd

Exempel 10.4

Beräkna mantelytans area av kroppen i det första exemplet (a).

Lösning

Vi behöver en infinitesimal area dA. Vi kan ta kurvan $y = \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 4$, som sedan roteras kring $x-$axeln. En infintesimal del av kurvan har längden

$$dS := \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$

Detta ger en infinitesmal remsa med area (där omkretsen är $2\pi y$)

$$\begin{aligned} dA &= 2\pi y dS = 2\pi\sqrt{x}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx \Leftarrow A = 2\pi \int_0^4 \sqrt{1/4 + x}\,dx = \\ &= \frac{4\pi}{3}\left[(1/4 + x)^{3/2}\right]_0^4 = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 1\right) \text{ a.e..} \end{aligned}$$

Exempel 10.5

Vi kan också beräkna längden L av kurvan $y = f(x)$ genom att bara integrera

$$L = \int_{x=0}^{4} dS = \int_{0}^{4} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx.$$

Integralen är lite komplicerad att beräkna men inte helt omöjlig.

Exempel 10.6

Beräkning av längden av en spiral

En cirkulär spiral kan beskrivas av sambandet

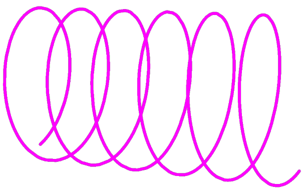
$$f(t) = (a\,t, r\cos t, r\sin t) \in \mathbb{R}^3. \text{ där } a > 0\,, r > 0$$

Vi kan se det som att spiralen roteras kring $x-$axeln. Vad är längden av tre varv?

Lösning

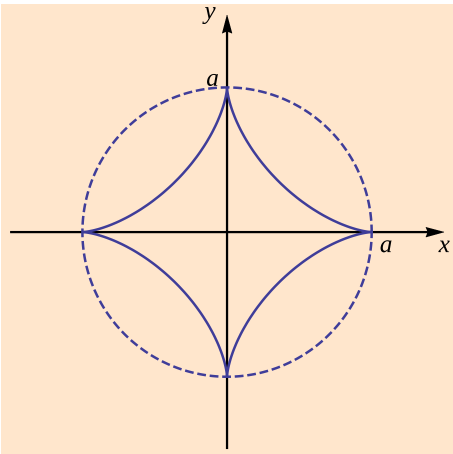
Vi har parameteriseringen von och beräknar $r'(t) = (a, -r\sin t, r\cos t)$. Längden ges av

$$L = \int_{0}^{6\pi} \sqrt{a^2 + r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = \int_{0}^{6\pi} \sqrt{a^2 + r^2}\, dt = 6\pi\sqrt{a^2 + r^2}.$$



Exempel 10.7

En *astroid* är en kurva som ges av $t \curvearrowright a(\cos^3 t, \sin^3 t), \quad a > 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$.



(a) Beräkna längden av astroiden.

Lösning

$$L = a\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{(3\cos^2 t(-\sin t))^2+(3\sin^2 t(\cos t))^2} =$$

$$= 12a\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}dt = 12a\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt = 3[\cos 2t]_{\pi/2}^{0} = 6a \text{ l.e.}$$

Längden av cirkeln med radie a är $2\pi a > 6a$.

(b) Beräkna arean som begränsas av kurvan.

Lösning

Med arean som A är

$$\frac{A}{4} = \int_{\text{1:a kvadr.}} g(x)dx$$

där kurvan i första kvadrant beskrivs av $y = g(x)$. Vi sätter $y = g(x) = a\sin^3 t$ och $x = a\cos^3 t$. Detta är en V.S. med $dx = 3a\cos^2 t(-\sin t)dt$ och $t-$gränser $\alpha = \pi/2$ och $\beta = 0$.

$$\frac{A}{4} = 3a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t{\cdot}\sin^4 t dt = 3a^2\int_0^{\pi/2}\cos^4 t{\cdot}\sin^2 t\,dt, \text{ av symmetriskäl.}$$

Alltså är

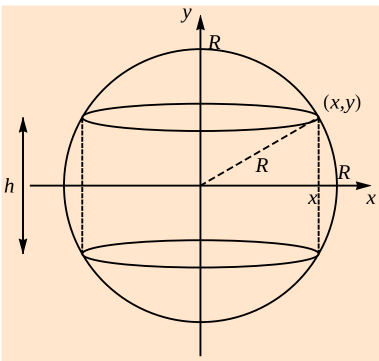
$$\frac{A}{2} = 3a^2\int_0^{\pi/2}(\sin t\cdot\cos t)^2dt = \frac{3a^2}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt = \frac{3a^2}{8}[t-\frac{1}{4}\sin 4t]_0^{\pi/2} = \frac{3a^2\pi}{16}$$

$$\iff A = \frac{3a^2\pi}{8} \text{ a.e.}$$

1.3 Rotation och Tröghetsmoment

Exempel 10.8

Vilken rörelseenergi har ett klot som roterar kring sin symmetriaxel? Vi antar att densiteten är konstant ρ, radien är R och att vinkelhastigheten är ω.



$y-$koordinaten i punkten (x, y) uppfyller $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Lösning

En kropp med massa dm radien r vinkelrät mot rotationsaxeln som symmetriaxel har konstant hastighet $v = \omega\cdot x$, massan $dm = 2\pi x\cdot h\cdot dx\,\rho$ och alltså rörelseenergin $dW_k = \frac{1}{2}dm\cdot v^2$, där $h = 2\sqrt{R^2-x^2}$. Totala W_k fås genom att integrera:

$$W_k = \int_{r=0}^{R} dW_k = \frac{4}{15}\pi\omega^2R^5\rho.$$

Nu uttrycker vi W_k med klotets massa

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} R^3.$$

$$W_k = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 \cdot \frac{2}{5} \cdot R^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2}_{\text{Tröghetsmoment } I} \cdot \omega^2.$$

Detta är alltså tröghetsmomentet för ett klot med konstant densitet och radie R.

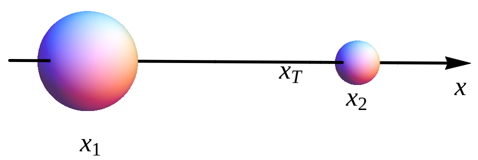
Kommentarer Olika kroppar har olika tröghetsmoment. Som övning kan man beräkna en rak cirkulär kons tröghetsmoment med konstant densitetet.

1.4 Sammanfattning av formler

$$\begin{aligned}
\text{Skivmetoden:} \quad & V &=& \pi \int_a^b f(x)^2 dx \\
\text{Skalmetoden:} \quad & V &=& 2\pi \int_a^b (b-x)|f(x)|f'(x)dx^{(*)} \\
\text{Kurvlängd:} \quad & L &=& \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx \\
\text{Mantelytas area:} \quad & A &=& \int_a^b 2\pi|f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}dx
\end{aligned} \tag{1}$$

$^{(*)}$ Denna formel modifieras beroende på det konkret fallet.

1.5 Tyngdpunkt/masscentrum m.m.



Tyngdpunktens koordinat x_T ligger mellan x_1 och x_2.

Tyngdpunkt för två klot: Vi antar att de två kloten har tyngdpunkt i x_1 respektive x_2 med massor m_1 respektive m_2 med tyngdpunkts x_T. För denna koordinat är det balans mellan vänster och höger kraftmoment, alltså

$$M_1 := (x_T - x_1)m_1 = (x_2 - x_T)m_2 = M_2 \iff x_T = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}.$$

n punktmassor: Tyngdpunkt för n punktmassor med vardera massa Δm_k i punktera x_k, $a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ är

$$x_T = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \cdot \Delta m_k}{m_0} \text{ där } m_0 = \sum_{k=1}^n \Delta m_k.$$

kont. utbredd kropp: Eller för kontinuerligt utbredd massa längs $x-$axeln, $a \le x \le b$:

$$x_T = \frac{\int_{x=a}^b x\, dm}{m_0}. \tag{2}$$

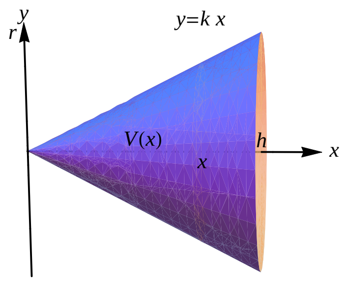
Exempel 10.9
Givet en rak cirkulär kon med radie r och höjd h.

(a) Beräkna konens volym uttryckt i r och h.

(b) Givet att konen har konstant densitet ρ, bestäm koordinaten för dess tyngdpunkt.

(c) Beräkna mantelytans area.

Lösning



(a) Konens volym uttryckt i r och h: Vi låter konens symmetriaxel vara $x-$axeln. En ekvation för en av generatriserna är $y = k\,x = \dfrac{r}{k}\,x =: f(x)$. M.h.a. skivmetoden (skivformeln) får vi volymen V_0 till

$$V_0 = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{k}\,x\right) dx = \frac{1}{3}\pi h r^2.$$

(b) Givet att konen har konstant densitet ρ. $y-$koordinaten för dess tyngdpunkt är $y = y_T = 0$, p.g.a. symmetri. Vi har bara formeln (2) och behöver gör men V.S. från m till x. Vi ser $m = m(x)$, d.v.s. m som funktion av x där $m(x) = \rho\,V(x)$. $V(x)$ är volymen av konen med höjd x, $0 \leq x \leq h$. Denna kon har radie $\dfrac{r}{h}\,x$. Alltså är

$$V(x) = \pi\cdot\left(\frac{r}{h}\right)^2 \frac{x^3}{3} \text{ och således } m = m(x) = \rho\cdot V(x) = \rho\cdot\pi\cdot\left(\frac{r}{h}\right)^2 \frac{x^3}{3}.$$

Vi differentierar:

$$dm = \rho\cdot\pi\cdot\left(\frac{r}{h}\right)^2 x^2 dx.$$

Täljaren i (2) är

$$\int_{x=0}^h x dm = \int_0^h \rho\cdot\pi\cdot\left(\frac{r}{h}\right)^2 x^3 dx = \rho\cdot\pi\cdot\left(\frac{r}{h}\right)^2\cdot\frac{h^4}{4} = \rho\cdot\pi\cdot r^2\cdot\frac{h^2}{4}.$$

Nämnaren är

$$m_0 = m(h) = \rho\cdot\pi\cdot\frac{r^2 h}{3}.$$

Således är

$$x_T = \frac{\rho\cdot\pi\cdot r^2\cdot\frac{h^2}{4}}{\rho\cdot\pi\cdot\frac{r^2 h}{3}} = \frac{3}{4}\,h,$$

d.v.s. 1/4 av höjden från bottenplattan.

(c) Beräkna mantelytans area A. ...

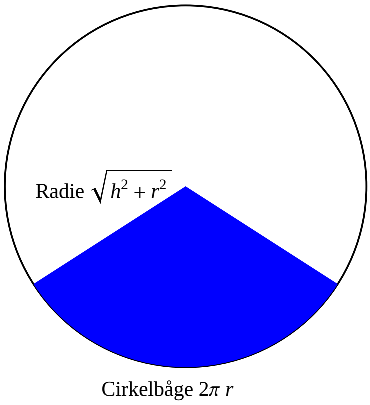
$$A = \int_{x=0}^h 2\pi y\,dS \text{ där } y = f(x) = \frac{r}{h}\,x \text{ och } dS = \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$

Nu är $f'(x) = \dfrac{r}{h}$. Alltså är

$$A = 2\pi \sqrt{1 + (r/h)^2} \int_0^h \frac{r}{h}\, x\, dx = \pi\, r\, \sqrt{h^2 + r^2}.$$

Kommentar: Man kan klippa upp konen längs en generatris och få en cirkelsektor med radie $\sqrt{h^2 + r^2}$ och med cirkelbåge $2\pi r$. En sådan cirkelsektors area är just

$$A = \frac{2\pi r \cdot \sqrt{h^2 + r^2}}{2} = \pi r \sqrt{h^2 + r^2}.$$



Cirkelsektor med radie $\sqrt{h^2 + r^2}$ *och cirkelbåge* $2\pi\, r$.