1 Föreläsning III

1.1 Bildandet av nya funktioner

M.h.a. de elementära funktioner bildar man nya genom summa, differens, produkt och kvot. Dessutom finns *sammansätttnng*.

Exempel 3.1
Ex.vis med $f(x) = \sin x$ och $g(x) = x^2$ är den sammansatta funktionen

$$f(g(x)) = \{g(x) =: z = x^2\} = g(z) = f(x^2) = \sin(x^2)$$

och

$$g(f(x)) = \{f(x) =: z = \sin x\} = f(z) = g(\sin x) = \sin^2 x.$$

I det första fallet är $g(x) = z = x^2$ *inre funktion* och $f(z) = \sin z$ *yttre* funktion. I det andra fallet är $f(x) = z = \sin x$ *inre funktion* och $g(z) = z^2$ *yttre* funktion.

1.2 Gränsvärde och kontinuitet

Vi utgår från att *alla* elementära funktioner är kontinuerliga (på respektive definitionsmängd). Ex.vis är $h(x) = \cos x$ kontinuerlig och speciellt i $x = a = 0$:

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1.$$

Vidare gäller att

1. $f(x)$ kontinuerlig $\Longrightarrow c \cdot f(x)$ kontinuerlig.
2. $f(x)$ och $g(x)$ kontinuerliga $\Longrightarrow f(x) \pm g(x)$ kontinuerlig.
3. $f(x)$ och $g(x)$ kontinuerliga $\Longrightarrow f(x) \cdot g(x)$ kontinuerlig.
4. $f(x)$ och $g(x)$ kontinuerliga $\Longrightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)}$ kontinuerlig.
5. $f(z)$ och z=$g(x)$ kontinuerliga $\Longrightarrow f(g(x))$ kontinuerlig.

Antag a och A reella tal. Om $f(x) \longrightarrow A$, $g(x) \longrightarrow B$, då $x \to a$, så gäller

$$f(x) + g(x) \longrightarrow A + B.$$

Bevis

Tag godt. $\varepsilon > 0$. Då finns $\delta_1 > 0$ och $\delta_2 > 0$ sådana att om $|x - a| < \delta_1$ och $|x - a| < \delta_2$ så är

$$|f(x) - A| < \varepsilon/2 \text{ och } |g(x) - B| < \varepsilon/2.$$

Sätt $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ och antag $|x - a| < \delta$. Då gäller att

$$\varepsilon = \varepsilon/2 + \varepsilon/2 > |f(x) - A| + |g(x) - B| \geq |(f(x) + g(x)) - (A + B)|$$

och beviset är klart.

∎

1.3 Några gränsvärden av typ "0/0"

Exempel 3.2

(a) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to -2} \frac{7x^2 + 13x - 2}{x^3 + 8}.$$

Lösning

Vi ser att vi får 0 i nämnaren om vi sätter in $x = -2$. Det implicerar att $x - (-2) = x + 2$ är en faktor till nämnaren, enligt faktorsatsen. Detsamma gäller säljaren, så gränsvärdet kallas av typ "0/0". Vi kan skriva om den rationella funktionen som

$$\frac{(x + 2)(7x - 1)}{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{7x - 1}{x^2 - 2x + 4}.$$

Vi ser att nämnaren $\neq 0$ om $x = -2$. För att beräkna gränsvärdet är de nu bara att sätta in $x = -2$, som ger $\lim_{x \to -2} \frac{7x^2 + 13x - 2}{x^3 + 8} = -\frac{5}{4}$.

(b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x}{\sqrt{x + 1} - \sqrt{1 - x}}.$$

Lösning

Vi ser återigen att det är av typ ”0/0” och nämnaren är inte ett polynom. Vi försöker med att förlänga med nämnarens *konjugat*. Alltså

$$\frac{2x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}}=\frac{2x}{2x(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})}=\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}.$$

Nu kan vi bara sätta in $x=0$ och vi får gränsvärdet 2 (Svar).

Observera att i (a) kan vi låta $x\longrightarrow-\infty$ och få gränsvärdet 0:

$$\begin{aligned}\frac{7x-1}{x^2-2x+4} &= \{\text{Dividera med nämnarens högstagradsterm i tälj. och nämn.}\} = \\ &= \frac{(7x-1)/x^2}{(x^2-2x+4)/x^2}=\frac{7/x-1/x^2}{1-2/x+4/x^2}\longrightarrow\frac{0}{1}=1 \text{ då } x\longrightarrow-\infty.\end{aligned}$$

1.4 Instängninglagen

Innan vi formulerar den och bevisar den skall vi titta lite mer på abolutbelopp och olikheter. Olikheten $|A-B|<\varepsilon$ kan skrivas $-\varepsilon<A-B<\varepsilon$ och vice versa.

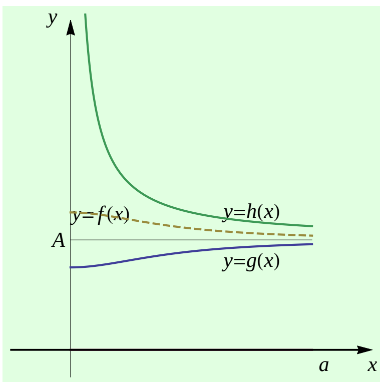
Sats

Instängninglagen
Antag att $f(x)\to A$, $g(x)\to A$ då $x\to a$ samt antag att

$$g(x)\le f(x)\le h(x).$$

Då gäller även att $f(x)\to A$, då $x\to a$.

∎



Bevis

Tag ett godtyckligt $\varepsilon > 0$. Då finns $\delta_1 > 0$ och ett $\delta_2 > 0$, sådana att

$$|x-a| < \delta_1 \Longrightarrow |h(x) - A| < \varepsilon \text{ och } |x-a| < \delta_2 \Longrightarrow |g(x) - A[< \varepsilon.$$

Låt nu $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$ och tag $x: \ |x-a| < \delta$. Då gäller

$$-\varepsilon < g(x) - A \leq f(x) - A \leq h(x) - A < \varepsilon$$

som implicerar att

$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ d.v.s. } f(x) \longrightarrow A \text{ då } x \longrightarrow a$$

V.S.B.

∎

Kommentarer

- Instängningslagen gäller även om a eller A är $\pm\infty$. Beviset ovan görs för $a, \quad A \in \mathbb{R}$.

1.5 Två standardgränsvärden

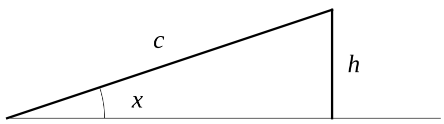
1. Gränsvärdet
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{1}$$
Låt osss tolka vad det innebär. Först och främst är x i radianer. Ex.vis motsvaras $360°$ av 2π. Kvoten $\dfrac{180°}{\pi} = 57.3\ldots°$ används för att räkna om radianer till grader:
$$x \text{ i radianer motsvarar } \frac{180°}{\pi} \cdot x \text{ (grader).}$$

2. (1) innebär att $\sin x \approx x$ om $|x|$ är liten och i radianer.

Ex: En backe lutar 10%. Vilken är vinkeln mellan backen och horisontalplanet?

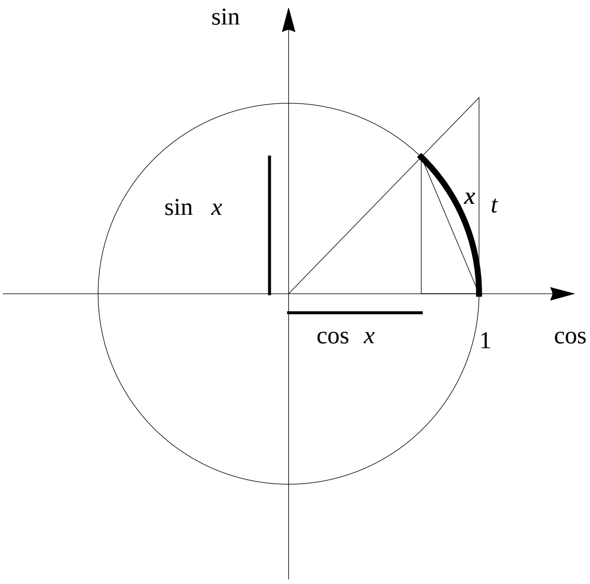
Lösning

Vi får att
$$\sin x = \frac{h}{c} = 0.1 \approx x$$
eftersom 0.1 är ett litet tal. Vad blir detta i grader? Vi får att vinkeln är
$$x \cdot \frac{180°}{\pi} = 0.1 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 5.7°.$$
Backen lutar (som mest) $5.7°$.



Bevis

av (1)



För att bestämma t betraktar vi den rätvinkliga triangeln med t som höjd och med bas 1. Denna triangel är likformig med den lilla rätvinkliga triangeln med höjd $\sin x$ och bas $\cos x$. Detta ger

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{t}{1} \text{ alltså att } \tan x = t.$$

För $0 < x < \pi/2$ ger enhetscirkeln

Area av liten triangel		Area av cirkelsektor		Area av stor triangel
$\frac{\sin x \cdot 1}{2}$	$\leq$	$\frac{x \cdot 1^2}{2}$	$\leq$	$\frac{1 \cdot \tan x}{2}$

som ger

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

Nu sätter vi $f(x) = \cos x$, $h(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ och $1 \equiv g(x)$. Eftersom $\cos x \to \cos 0 = 1$ (kontinuitet hos $\cos x$ i $x = 0$) ger instängninslagen att $h(x) = \dfrac{\sin x}{x} \longrightarrow 1$ då $x \to 0_+$. Beviset för $x \to 0_-$ fås genom en liten modifikation av beviset i fallet $x \to 0_+$.

Kommentar: Gränsvärdet $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ är av typen ”$\frac{0}{0}$”.

Exempel 3.3
Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Lösning

Sett är av typen ”$\frac{0}{0}$” eftersom $\cos 0 = 1$. Vi har att $1-\cos x = 2\sin^2(x/2)$, så att kvoten kan skrivas (Det gäller att skriva om till $\sin x/x$)

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right]^2 \longrightarrow \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2} \text{ då } x\to 0.$$

---

4. Storleksordningen på $\ln x$, x^a och b^x, där $a>0$ och $b>1$. Vid en jämförelse mellan $f(x)=x^3$ och $g(x)=1.1^x$, då $x\to\infty$, så vinner $g(x)$. I själva verket är $f(x) << g(x)$ för stora x eller mer exakt:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

D.v.s. exponentialfunktonen växer betydligt snabbare än potensfunktionen, då $x\to\infty$. Allmänt gäller

$$\lim_{x\to}\frac{x^b}{a^x} = 0, \text{ om } a>1. \tag{2}$$

Likaså

$$\frac{(\ln x)^d}{x^b} \longrightarrow 0 \text{ då } x\longrightarrow\infty. \tag{3}$$

För att bevisa (2) behöver vi *Binomialsatsen*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{(n-k)}b^k. \tag{4}$$

där $\binom{n}{k}$ är binomialkoefficienter. Ex.vis är

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2\cdot 1} = \frac{n(n-1)}{2} \text{ och } \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

För $n=3$ blir de båda leden

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Bevis

av (2). Antag först att $b \leq 0$. Då är $x^b \leq 1$, om $x \geq 1$, så att för dessa x är

$$\frac{x^b}{a^x} \leq a^{-x} \to 0 \text{ då } x \to \infty.$$

Antag nu att $b > 0$. Vi gör omskrivningen

$$\frac{x^b}{a^x} = \left[\frac{x}{\left(a^{1/b}\right)^x}\right]^b.$$

Det räcker att visa att $\dfrac{x}{c^x} \to 0$, då $x \to \infty$ där $c = a^{1/b}$. Observera att även $c > 1$. Nu är $c = 1 + p$ för något $p > 0$. Låt $n = [x]$, heltalsdelen av x. Då gäller att $x - 1 < n \leq x$, d.v.s. $x \to \infty \iff n \to \infty$. Vi skattar nämnaren nedåt.

$$c^x = \frac{1}{c} \cdot c^{x+1} \geq c^{n+1} = (1+p)^{n+1} \geq \binom{n+1}{2} p^2 \cdot 1^{n-1} = \frac{(n+1)n}{2} \cdot p^2.$$

Det betyder att

$$\frac{x}{c^x} \leq \frac{2(n+1)}{(n+1)\,n\,p^2} = \frac{2}{n\,p^2} \to 0 \text{ då } x \to \infty.$$

∎

Nu följer (3) relativt enkelt.

Bevis

Fallet $d \leq 0$ görs ungefär som fallet $b \leq 0$ i (2) och lämnas som övning. För $d > 0$ sätt $\ln x = t$. Då gäller att $t \to \infty \iff x \to \infty$ och (3) blir

$$\frac{t^d}{e^{bt}} = \frac{t^d}{\left(e^b\right)^t} \to 0 \text{ då } t \to \infty$$

eftersom $a := e^b > 1$, så villkoren för beviset av (2) är uppfyllda.

∎

5. Ett annat standardgränsvärde är

$$\lim_{n \to \pm\infty} (1 + 1/n)^n = e.$$

Vi använder det i ett exempel.

Ex: Beräkna

$$\lim_{x \to 0} (1 - \sin 2x)^{1/x}.$$

Lösning

Vi försöker återföra det på gränsvärdet ovan, sm kan skrivas (Sätt $n = 1/x$)

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

$$\left\{ \left[(1 - \sin 2x)^{1/(-\sin 2x)} \right]^{\frac{\sin 2x}{2x}} \right\}^{-2}$$

Vi vet att $x \to 0 \Rightarrow \sin 2x \to 0$. *Innanför* fyrkantsparanteserna är gränsvärdet e. Vidare går $\dfrac{\sin 2x}{2x}$ mot 1. Gränsvärdet är alltså

$$\frac{1}{e^2}.$$