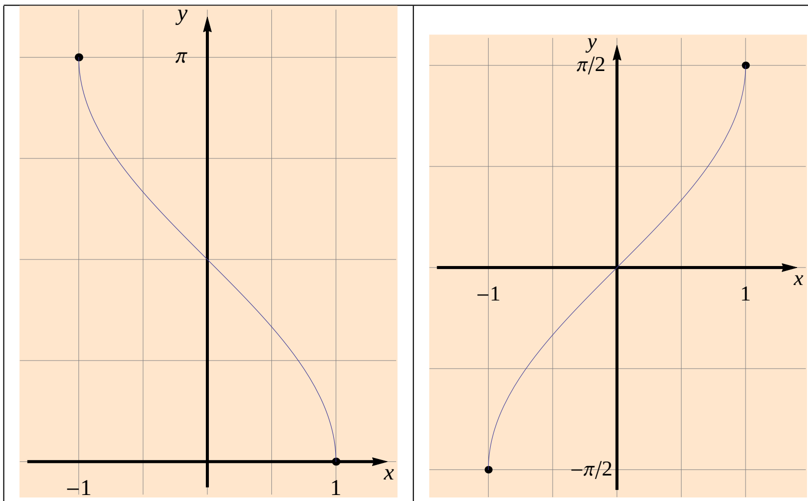
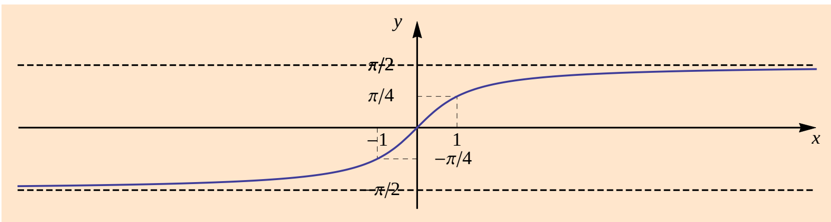
1 Föreläsning V

1.1 Mer om arcusfunktioner och gränsvärde

1. 

$y = \arccos x$ $\qquad$ $y = \arcsin x$



$y = arctanx\ med\ sneda\ asymptoter\ y = \pm\frac{\pi}{2}$

Exempel 5.1

Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x}.$$

Lösning

$$y := \arctan x \Longrightarrow \tan y = x \text{ och } x \to 0 \Rightarrow y \to 0.$$

Gränsvärdet kan skrivas

$$\lim_{y\to} \frac{y}{\tan y} = \lim_{y\to} \cos y \cdot \frac{y}{\sin y} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

Exempel 5.2
Den lokala inversfunktionen till $y = \cos x$ är $x = \arccos y$. Obs!

$$\arccos x = y \Longrightarrow \cos(\arccos x) = x = \cos y \text{ men ekvivalens gäller ej:}$$

$$\cos(5\pi/3) = \frac{1}{2} \text{ men } \arccos(1/2) = \frac{\pi}{3}.$$
$$\arccos(1/2) = \frac{\pi}{3} \Longrightarrow \cos(\pi/3) = \frac{1}{2}.$$

2 Derivata

Med derivata menas en funktions momentana försändring (i $y-$led relativt ändringen i $x-$led).

2.1 Derivata av potensfunktion och exponentialfunktion m.fl.

1. Derivatan av $f(x) := 5x^2$ fås genom att ställa upp *differenskvoten*

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 5 \cdot \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 5 \cdot \frac{(x+h+x)(x+h-x)}{h} = 5 \cdot (2x+h) \longrightarrow 5 \cdot 2x$$

Då $h \to 0$. Derivatan är alltså $f'(x) := 10x$. Man skriver detta

$$f'(x) = D\,f(x) = 5 \cdot 2x = 10x.$$

Vi observerar att derivatan är $5 \cdot 2x$. Mer allmänt gäller

$$fx) = Cx^a \Longrightarrow f'(x) = C \cdot a \cdot x^{a-1}. \tag{1}$$

2. Derivatan av $g(x) := e^x$: Differenskvot med gränsvärde är

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} \longrightarrow e^x \cdot 1, \text{ d.v.s. } g'(x) = e^x.$$

För att derivera $g_1(x) := a^x$, skriver vi om $a^x = e^{x \ln a}$. Differenskvoten m.m. blir

$$a^x \cdot \frac{e^{x \ln a} - 1}{h \cdot \ln a} \cdot \ln a \longrightarrow a^x \cdot 1 \cdot \ln a.$$

Vi ser att derivatan får faktorn $\ln a$. Detta är den *inre derivatan.*

- Det är typiskt, när man har en funktion, som kan dela upp i en inre och en yttre funktion. Derivatan av en sammansatt funktion $f(g(x))$ är
$$Df(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

3. Derivata av summa: Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara. Då är summan det och
$$D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x).$$
Derivatan av $C\,f(x)$ är $C\,f'(x)$. Jämför derivaran av $f(x) = 5x^2$. Dessa två egenskaper (tillsammans) kallas *linearitetsegenskaper* för derivata.

2.2 Derivata av trigomometriska funktioner

1. Vi börjar med derivatan av $f(x) = \cos x$ och utnyttjar gränsvärdet
$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$
Ändringskvoten är
$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \{h = 2\delta\} = \frac{\cos((x+\delta)+\delta) - \cos((x+\delta)-\delta)}{2\delta}.$$
Vi utnyttjar additionsformler (-lagar) för cosinus:
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$
$$\begin{aligned} \cos((x+\delta)+\delta) - \cos((x+\delta)-\delta) &= \cos(x+\delta)\cos\delta - \sin(x+\delta)\sin\delta + \\ &\quad -(\cos(x+\delta)\cos\delta + \sin(x+\delta)\sin\delta) = \\ &= -2\sin(x+\delta)\sin\delta. \end{aligned}$$
Ändringskvoten blir
$$-\sin(x+\delta) \cdot \frac{2\sin\delta}{2\delta} \longrightarrow -\sin x \cdot 1 \text{ då } x \to 0.$$
Vi har visat att $g(x) = \cos x \Rightarrow g'(x) = -\sin x$.

2. Derivata av summa, produkt, sammansatt funktion och kvot.
Summa lämnas om övning. För övriga moment ovan behövs en sats. Den säger att deriverbarhet är *tillräckligt villkor* för kontinuitet. Mer exakt:

Sats 1 En funktion är deriverar i $x \Longrightarrow$ funktionen är kontinuerlig i x.

Bevis: Antag att $f(x)$ är deriverar i x. Det betyder att

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to f'(x) \text{ då } x \to 0.$$

Vi inför en funktion $\rho(h)$, som differensen nedan. Multipicera båda led med h och vi får

$$\rho(h) := f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Då gäller att $\rho(h) \to 0$, då $h \to 0$. Multiplicera med h i båda led:

$$f(x+h)-f(x) = h \cdot (f'(x) - \rho(h)) \tag{2}$$

och HL$\longrightarrow 0$, då $h \longrightarrow 0$, vilket visar att $f(x+h) \to f(x)$, då $h \longrightarrow 0$.

Derivata av produkt

Ändringskvoten

$$\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \longrightarrow$$

$$f'(x)\cdot g(x+0) + f(x)g'(x).$$

Exempel 5.3
Derivatan av x^7 är $7x^6$. Vi kan skriva $x^7 = x^3 \cdot x^4$ och får derivatan med produktregeln till

$$3x^2 \cdot x^4 + x^3 \cdot 4x^3 = 7x^6$$

3. Derivata av sammansatt funktion $f(g(x))$ fås med definitionen av en funktion $\rho(h)$.

$$\begin{array}{lrcll} \text{Inre funktion:} & g(x+h)-g(x) & = & h\cdot(g'(x)-\rho_1(h)) & = r_1(h). \\ \text{Yttre funktion:} & f(z+k)-f(z) & = & k\cdot(f'(z)-\rho_2(k)) & = r_2(k), \end{array}$$

där $\rho_2(k) \longrightarrow 0$, då $k \longrightarrow 0$ och p.s.s med $\rho_1(h)$ (definierad i (2) sidan 4). Sätt $g(x) = z$ och $k = r_1(h)$. Då gäller att $\rho_2(k) \longrightarrow 0$, då $h \longrightarrow 0$.
Vi kan skriva diffferensen

$$f(g(x+h)) - f(g(x)) = f(g(x) + r_1(h)) - f(g(x)) = f(z + r_1(h)) - f(z) =$$

$$f(z+k) - f(z) = k \cdot (f'(z) - \rho_2(k)) =$$

$$h \cdot (g'(x) - \rho_1(h)) \cdot (f'(g(x)) - \rho_2(k)).$$

Vi får att

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = (g'(x) - \rho_1(h)) \cdot (f'(g(x)) - \rho_2(k)) \longrightarrow (g'(x) - 0)(f'(g(x)) - 0)$$

då $h \longrightarrow 0$. Vi har bevisat att, med förutsättningar som ovan, är

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{yttre derivata,}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{inre derivata}} \tag{3}$$

Obs! Vid beräkning av den yttre derivatan ses den inre funktionen $g(x) = z$, som en variabel z och vid beräkning av den inre derivatan deriverar man $g(x)$ med avseende på sin variabel x.

Exempel 5.4
Derivera $h(x) = (x^3)^4$ som en derivata av en sammansatt funktion.

Lösning

$$\frac{d}{dx}(x^3)^4 = 4 \cdot (x^3)^3 \cdot 3x^2 = 12x^{11},$$

vilket stämmer med derivatan av x^{12}.

Da^x

$$D(a^x) = D(e^{x \ln a}) = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

$D \sin x$

$$D \sin x = D \cos(\pi/2 - x) = -\sin(\pi/2 - x) \cdot (-1) = \cos x.$$

$D\frac{f(x)}{g(x)}$ Vi börjar med derivatan av $\dfrac{1}{x}$.

$$D(x^{-1}) = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

$D\dfrac{1}{g(x)}$

$$D\frac{1}{g(x)} = D(g(x))^{-1} = -1 \cdot g(x)^{-2} \cdot g'(x).$$

$D\frac{f(x)}{g(x)}$ igen. Derivata av kvot fås med derivata av produkt och sammansatt funktion.

$$D\frac{f}{g} = Df \cdot \frac{1}{g} = f' \cdot \frac{1}{g} - f \cdot \frac{g'}{g^2} = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2}.$$

$D\tan x$

$$D\tan x = D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

Detta kan i sin tur förenklas på två sätt.

$D\ln x$ För att derivera $g(x) = \ln x$ utnyttjar vi identiteten

$$x = e^{\ln x} \Longrightarrow Dx = 1 = \underbrace{e^{\ln x}}_{y.d.} \cdot \underbrace{D\ln x}_{i.d}.$$

Vi dividerar med x i de två sista leden och får

$$\frac{1}{x} = D\ln x.$$

Exempel 5.5
Derivera

(a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$
(b) $g(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$
(c) $h(x) = \ln(3x)$
(d) $p(x) = \sin^3 x$
(e) $q(x) = \arccos x$

Lösning

(a)
$$f(x) = x^3 - 3x + 2 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 3.$$

(b)
$$g(x) = \sqrt{2x^2 + 1} = (2x^2+1)^{1/2} \Longrightarrow g'(x) = \frac{1}{2}(2x^2+1)^{-1/2} \cdot 4x = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}.$$

(c)

$$h(x) = \ln(3x) \Longrightarrow h'(x) = \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x} \text{ eller } D\ln(3x) = D(\ln x + \ln 3) = \frac{1}{x} + 0.$$

(d)

$$p'(x) = 3\sin^2 x \cos x.$$

(e) Vi har identiteten $x = \cos(\arccos x)$ med derivata (Obs! $0 \leq \arccos x \leq \pi$) och där är $\sin \geq 0$.)

$$1 = -\sin(\arccos x) \cdot D \arccos x.$$

Nu är

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\text{och därmed är } D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Vi ser att derivatan är negativ, vilket hänger ihop med att arccos är en avtagande funktion.

(f) Derivatan av $\arcsin x$:

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2} \text{ så att } D(\arcsin x) = D\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = 0 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

▮ Observera att derivatan av $\arccos x$ och $\arcsin x$ inte existerar i respektive ändpunkter av respektive definitionsmängd.

2.3 Konstruktion av kurva

2.3.1 Växande, avtagande och lokal extrempunkt

Definition 1 Antag att $I \subseteq \mathbb{R}$ är ett intervall.

- En funktion är växande på intervallet I, om för varje x_1, $x_2 \in I$ med $x_1 < x_2$ gäller att $f(x_1) \leq f(x_2)$. En funktion är strängt växande, om $f(x_1) < f(x_2)$.
- En funktion $f(x)$ är avtagande och strängt avtagande, om $-f(x)$ växande respektive strängt växande.
- En funktion har ett lokalt maximum $f(x_0)$ i $x_0 \in I$, om det finns $\delta > 0$, sådant att $f(x_0) \geq f(x)$ för alla x i $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Punkten $(x_0, f(x_0))$ kallas lokal maximipunkt.
- $f(x_0)$ är ett lokal minimum, om $-f(x_0)$ är ett lokal minimum.

Sats: Om $f'(x_0)$ existerar i $x_0 \in I$ och $(x_0, f(x_0))$ är en lokal maximipunkt, så är $f'(x_0) = 0$.

Bevis

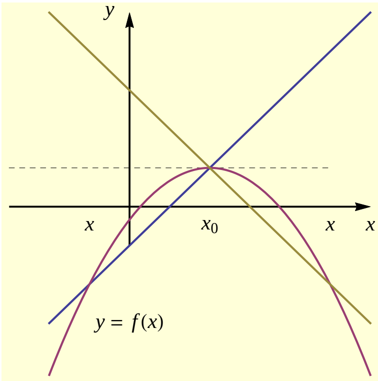
Antag att $x < x_0$. Då är

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \text{ så att } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0.$$

P.s.s. om $x > x_0$, så är

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \text{ så att } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0.$$

Alltså är $f'(x_0) = 0$.



Sekanten har positiv riktningskoefficient t.v. om den lokala maximipunkten.

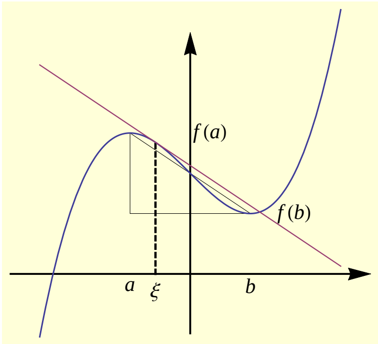
---

1. Derivatans tecken och funktionens förändring

Hjälpsats: (Lagranges medelvärdessats) Antag att $f(x)$ är kontinuerlig i $[a, b]$ och deriverbar i (a, b). Då finns ett ξ, sådant att

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{4}$$

Vi bevisar inte satsen i det nuvarande läget men illustrerar en med följande bild.



En funktionskurva med sekant och en parallell tangent,

(a) Vi formulerar nu en sats och bevisar den.

> **Sats** Om $f'(x) \geq 0\,(f'(x) > 0)$ i ett intervall, så är funktionen växande (strängt växande).

Bevis: Tag $a < b$ båda i ett delintervall till funktionens definitionsmängd. Eftersom $f'(x) \geq 0\,(x > 0)$, så är

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

för något $\xi : \quad a < \xi < b$ enligt Medelvärdessatsen och enligt förutsättningen i satsen är $f'(x) \geq 0\,(> 0)$. Alltså är

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0\,(> 0)$$

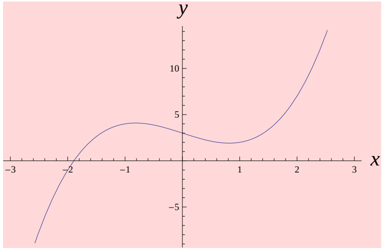
v.s.v.

Exempel 5.6

Funktionen $f(x) = x^3 - 3x + 2$ är ett polynom av grad 3. Vi skall rita/konstruera kurvan och tar hjälp av dess derivata.
$D_f = \{x : -\infty < x < \infty\} = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Derivatan är $f'(x) = 3x^3 - 3 = 3(x+1)(x-1)$ och är $= 0$ för $x = \pm 1$. *Tecknet* på derivatan bestäms av faktoriseringen. Vi gör ett *teckenschema*.

x	$<$	-1	$<$	1	$<$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

Vi ser att $(x,y_1) = (-1, 4)$ är en lokal maximipunkt och $(b, y_2) = (1, 0)$ är en lokal minimipunkt. Funktionen saknar minsta och största värde.



Exempel 5.7

Konstruera kurvan $y = g(x) = \dfrac{2x^2}{x+1}$

Lösning

$D_g = \{x : x \neq -1\}$.

- Lodrät asymptot: Vi ser att om $x < -1$, så är säljaren > 0 och nämnaren < 0, d.v.s. $g(x) \to -\infty$, då $x \to -1_-$. Alltså är $x = -1$ en lodrät asymptot. P.s.s. $g(x) \to +\infty$, då $x \to -1_+$.
- Sned saympot: Kvoten har grad $2 - 1 = 1$. Polynomdivision ger

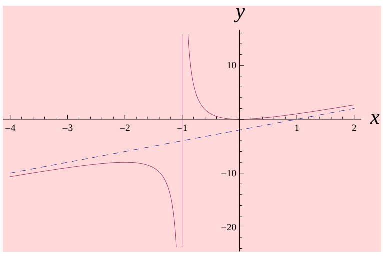
$$g(x) = 2x - 2 + \frac{2}{x+1},$$

  så sned asymptot är $y = 2x - 2$.
- Derivatan

$$g'(x) = \frac{2x(x+2)}{(x+1)^2} = 0 \Longleftrightarrow x = -2 \vee x = 0.$$

- Teckenschema:

x	$<$	2	$<$	0	$<$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	-8	$\searrow$	0	$\nearrow$



Exempel 5.8

från föreläsning II:

Funktionen är $h(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{x}$.

$D_h = \{x : x \neq 0\}$, $\quad h'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2x^2+1}} - \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{x^2} = \{\text{MGN}\} = -\dfrac{1}{x^2\sqrt{2x^2+1}}$.

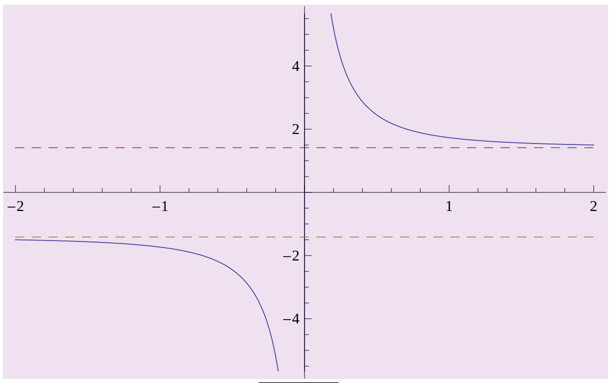
Vi ser att $h'(x) < 0$ för alla $x \in D_h$, alltså en avtagande funktion.
Den bör ha en sned asymptot $y = kx + m$. För att få k beräknar vi först

$$\frac{h(x)}{x} = \frac{|x|\sqrt{2+1/x^2}}{x^2} = \frac{\sqrt{2+1/x^2}}{|x|} \longrightarrow 0 \text{ då } x \to \pm\infty.$$

, d.v.s. $k = 0$ för en (eventuell) sned asymptot. Nu till m :värdet.

$$f(x) - kx = f(x) = \frac{|x|\sqrt{2+1/x^2}}{x} = \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{2+1/x^2}}{1} \longrightarrow -\sqrt{2} & \text{då } x \to -\infty \\ \text{och} & \\ \dfrac{\sqrt{2+1/x^2}}{1} \longrightarrow \sqrt{2} & \text{då } x \to \infty \end{cases}$$

Sned asymptot är $y = -\sqrt{2}$, då $x \longrightarrow -\infty$ och
$y = \sqrt{2}$, då $x \longrightarrow \infty$.



Kurvan $y = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{x}$ *med asympoter*

Teori Teorin som stöder påståendet att

$$\boxed{\begin{array}{c} f'(x) > 0 \implies f(x) \text{ strängt växande} \\ \text{alternativt} \\ f'(x) \geq 0 \implies f(x) \text{ strängt växande} \end{array}}$$

är komplicerad. Vi har infört satsen (4) och den bevisas med en annan sats (Rolles sats), som i sin tur bygger på satsen om minsta och största värde. Slutligen följer denna sista sats av ett *axiom*, ett obevisbara påstående, närmare bestämt *Supremumaxiomet.* Vi summerar det hela.

Supremumaxiomet	$\longrightarrow$
Satsen om minsta och största värde	$\longrightarrow$
Rolles sats	$\longrightarrow$
Lagranges medelvärdessats	$\longrightarrow$
$f'(x) \geq 0 \Longrightarrow f(x)$ växande	