1 Föreläsning VI

1.1 Max- och minproblem

Med de redskap som vi har, kontinuitet och derivata, kan vi lösa en del praktiska problem.

Exempel 6.1

En vattentomt skall mutas in med ett staket med längd 120 m. Tomtens form skall vara en rektangel med en sida utan staket. Den fjärde sidan (d.v.s. sidan utan staket) har den helt raka strandlinjen som gräns.
Vilken är den största area som en sådan tomt kan ha?

Lösning

Sätt längderna sidorna vinkelräta mot strandlinjen lika med x. Sidan parallell med strandlinjen har då längden $120 - 2x$. Arean är alltså $x(120 - 2x) =: A(x)$.
Vi ser att

- $D_A = \{x : 0 \leq x \leq 60\}$ ett kompakt intervall,
- $A(x)$ är kontinuerlig och
- $A'(x)$ existerar.

Funktionen antar alltså ett största värde, antingen i en *inre* stationär punkt eller i intervallets ändpunkter.
$A(0) = A(60) = 0$, så max antas där $A'(x) = 0$:

$$A'(x) = 120 - 4x = 0 \Longleftrightarrow x = 30,\ g_{\max} = A(30) = 1800.$$

Svar: Den största arean är 1800 m^2 och antas när tomtens sidolängder är 30, 30 och 60 m.

Kommentarer

- Arean är alltså inte störst då tomtens yta är kvadratisk.
- Kontinuitet på det kompakta intervallet $[0, 60] \ni x$ garanterar att det *finns* ett största värde. I liknande problem kan man inte alltid tekniskt/analytiskt bestämma det största värdet.
- Man kanske kan låt elever i 9:an och gymnasiet lösa problemet numeriskt för att sedan visa att det finns en maximal area.

Exempel 6.2

En stege med längd L lutar mot en rektangel med sidolängder a och b. Vilken är den minsta längden på stegen som når golv och vägg?

Lösning

Vi inför beteckningar x, y längs golv respektive vägg.

(1.) Pythagoras sats ger $x^2 + y^2 = L^2$.

(2.) Likformighet ger $\dfrac{y-b}{a} = \dfrac{b}{x-a}$.

Vi gör nu L^2 beroende av enbart x, genom att lösa ut y uttryckt i x, m.h.a. (2.)

$$y = b + \frac{ab}{x-a} = \frac{b(x-a)+ab}{x-a} = \frac{bx}{x-a}.$$

Insatt i (1.) blir

$$L^2 = x^2 + \left(\frac{bx}{x-a}\right)^2 =: f(x).$$

Minsta värdet av $f(x)$ erhålls i dess enda stationära punkt!

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 2\left(\frac{bx}{x-a}\right)\left(-\frac{ab}{(x-a)^2}\right) = 0 \iff \\ ab^2 &= (x-a)^3 \iff x = a + a^{1/3}b^{2/3}. \end{aligned}$$

Insatt i $f(x)$ får vi

$$f_{\min}(x) = f\left(a + a^{1/3}b^{2/3}\right) = \left(a + a^{1/3}b^{2/3}\right)^2 + \left(\frac{b\left(a + a^{1/3}b^{2/3}\right)}{a^{1/3}b^{2/3}}\right)^2.$$

Detta uttryck går att förenkla något till en hyfsat elegant form. Lämnas som övning.

- Olikheter kan visas med derivata.

Vi bevisar, m.h.a. derivata, att $x \le e^x$ för $x \in \mathbb{R}$.

Lösning

Bilda funktionen $f(x) = e^x - x$. Vi antar först att $x \ge 0$.

$$f(0) = 1,\ f'(x) = e^x - 1 \ge 0 \text{ om } x \ge 0.$$

Såeldes är $f(x)$ växande för $x \ge 0$. Tag ett $x \ge 0$. Då är $f(x) = e^x - x \ge f(0) = 1 \ge 0$.
För $x \le 0$ är $-x \ge 0$, så att $f(x)$ är summan av två termer som båda är ≥ 0. Alltså är $f(x) \ge 0$ även för $x \le 0$.

- Vi visar nu att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

Detta för att i nästa exempel visa att en exponentialfunktion med bas $a > 1$ växer mycket snabbare mot ∞ än varje potensfunktion x^b.

Lemma Låt $x \ge 0$.

$$\frac{x}{e^x} \le 1 \iff \frac{x/2}{e^{x/2}} \le 1.$$

Multiplicera med $2e^{-x/2}$ i båda led:

$$0 \le \frac{x}{e^x} \le 2e^{-x/2} \to 0 \text{ då } x \to 0.$$

Detta visar att även $\frac{x}{e^x} \to 0$, då $x \to \infty$, enligt Instängningslagen.

Sats Utifrån det förra exemplet visar vi nu att för $a > 1$ gäller att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0.$$

Vi gör följande omskrivning av kvoten.

$$\frac{x^b}{a^x} = \frac{x^b}{e^{x\ln a}} = \frac{(x\ln a)^b}{e^{x\ln a}} \cdot (\ln a)^{-b} = \left[\frac{(x\ln a)/b}{e^{(x\ln a)/b}}\right]^b \cdot \left(\frac{b}{\ln a}\right)^b.$$

Nu är den sista faktorn bara en konstant > 0. I den första faktorn gäller att

$$x \to \infty \iff t := (x\ln a)/b \to \infty.$$

Således kommer även

$$\left(\frac{t}{e^t}\right)^b \to 0 \text{ då } x \to \infty.$$

Sats Betrakta kvoten $\dfrac{(\ln x)^b}{x^c}$ för $c > 0$ och $b > 0$. Vi visar att

$$\frac{(\ln x)^b}{x^c} \to 0 \text{ om } x \to \infty.$$

Byt $\ln x = t$. Då gäller att även $t \to \infty$. Vi får då med likhet

$$\frac{(\ln x)^b}{x^c} = \frac{t^b}{e^{c\,t}}.$$

Med $a := e^c > 1$ får vi gränsvärdet i exempel 1.37. Det visar gränsvärdet ovan.

Exempel 6.3

Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x \to 0_+} x \ln x = 0$.

Lösning

Sätt $x = 1/t$. Då gäller att $t \to +\infty$.

$$x \ln x = \frac{1}{t} \cdot \ln(1/t) = -\frac{\ln t}{t} \to 0 \text{ då } x \to 0_+.$$