1 Föreläsning 7

1.1 Lite om konvex och konkav funktionskurva

Låt $f(x)$ vara en funktion definierad i ett intervall I. Om för varje par x_1 och x_2 i I gäller att sekanten mellan punkterna $(x_1, f(x_1))$ och $(x_2, f(x_2))$ ligger över (under) funktionskurvan, sägs $f(x)$ vara konvex (konkav).

Samband $f(x)$ konvex $\Longleftrightarrow$ För varje trippel $x_1 < x_2 < x_3$ av tal i I gäller att

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

d.v.s. sekanternas riktningskoefficienter växer.
Antag att $f(x)$ har andraderivata. Då gäller att $f'(x)$ växer. Mer exakt finns följande implikationer

$$f''(x) > 0 \Longrightarrow f'(x) \text{ växande } \Longrightarrow f(x) \text{ konvex.}$$

Speciellt är $f(x)$ konvex (konkav) kring en lokal minimipunkt (maximipunkt). Vi har följande samband.

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases} \Longrightarrow (x_0, f(x_0)) \text{ lokal minimipunkt.}$$

På liknande sätt kan man konstatera att man har en lokal maximipunkt. Om $f'(x_0) = 0$ och $f''(x_0) = 0$ kan man inte avgöra om punkten är min- max- eller terrasspunkt.

En inflexionspunkt är en punkt där $f''(x)$ byter tecken.

Man har sambandet terrasspunkt $\Longrightarrow$ inflexionspunkt.

Om $I = (a, b)$ är ett öppet intervall, gäller:
Konvex funktionskurva $\Longrightarrow$ kontinuerlig funktion.

1.2 Integral

Riemannsumma En bestämd integral definieras via Riemannssummor. En sådan summa bygger på en indelning av integrationsintervallet $[a, b] \ni x$ i ett antal (n) delintervall, m.h.a.

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_{n-1} < x_n = b$ var och en med längd $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. I varje delintervall $[x_{k-1}, x_k]$ väljs en "höjd"y_k.

Utifrån ovan nämnda definieras en Riemannsumma som

$$S := \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \Delta x_k. \tag{1}$$

Kommentar: En Riemannsumma $S \approx$ den sökta arean, integralen, som begränsas av $y = f(x)$, $x = 0$, $x = a$ och $x = b$.

Definition av Riemannintegral

Antag $f(x)$ *begränsad* i $[a,b]$.
En översumma O (undersumma U) är en summa som (1), där $y_k \geq f(x)$ ($y_k \leq f(x)$), för $x_{k-1} \leq x \leq x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.
Det följer att $U \leq O$.

Om det finns precis ett tal I : $U \leq I \leq O$ för alla under- och översummor, sägs $f(x)$ vara integrerbar (i Riemanns mening) och integralen skrivs

$$I = \int_a^b f(x)dx. \tag{2}$$

En central sats:

Om $f(x)$ kontinuerlig i $[a,b]$, så är den integrerbar.

(Medelvärdessatsen I)
Med förutsättningar som i satsen ovan, finns ett $\xi \in [a,b]$, sådant att

$$f(\xi) \cdot (b-a) = \int_a^b f(x)dx. \tag{3}$$

Bevis: Funktionen $f(x)$ är kontinuherlig i $[a,b]$ och antar ett minsta och största värde $f_{\min}$ och $f_{\max}$. Nu är

$$(b-a) \cdot f_{\min} \text{ och } (b-a) \cdot f_{\max}$$

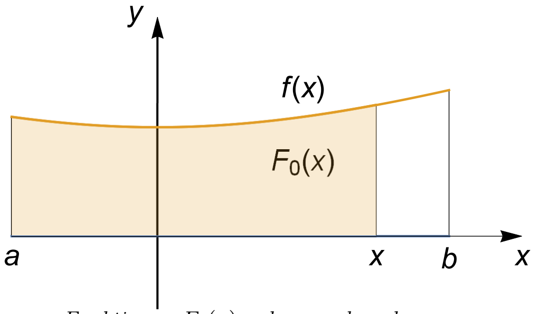
en under- respektive översumma till (2). Det betyder att

$$f_{\min} \leq \frac{1}{b-a} \cdot I =: y \leq f_{\max}.$$

Enlig satsen om *mellanliggande värde* är $y = f(\xi)$ för något $\xi \in [a,b]$ och (3) följer.

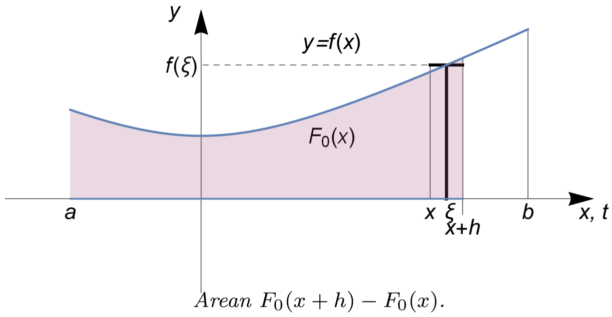
•

Antag att $f(x) \geq 0$ då $a \leq x \leq b$ och att $f(x)$ är kontinuerlig där. Den *bestämda* integralen $F_0(x) := \int_a^x f(t)dt$
definieras som arean av ytan som begränsas av $y = f(t)$, $y = 0$, $t = a$ och $t = x$, se figur.



Funktionen $F_0(x)$ =den markerade arean.

Analysens huvudsats Vi definierar $F_0(x)$ som arean i figuren ovan.



Arean $F_0(x+h) - F_0(x)$.

Då är $F_0(x+h) - F_0(x)$ är arean av den smala remsan med $t-$gränser x och $x+h$. Denna smala remsa är en rektangel med bredd h och höjd $f(\xi)$. Ett sådant ξ finns enligt medelvärdessatsen. Alltså

$$F_0(x+h) - F_0(x) = h \cdot f(\xi) \text{ eller } \frac{F_0(x+h) - F_0(x)}{h} = f(\xi).$$

- VL är en differenskvot och $\longrightarrow F_0'(x)$, då $h \longrightarrow 0$.
- I HL konvergerar $f(\xi)$ mot $f(x)$ p.g.a. kontinuitet.
- ”VL=HLger att $F_0'(x) = f(x)$ **Analysens huvudsats**.
- Speciellt ser vi att $F_0(a) = 0$ och $F_0(b) =: \int_a^b f(t)dt$
- En funktion $F(x)$, sådan att $F'(x) = f(x)$ kallas *primitiv funktion* till $f(x)$.
- Antag att $G(x)$ är deriverbar i ett intervall med derivata $= 0$. Då är $G(x) = C$, d.v.s. konstant. Speciellt om $G = F_1 - F_2$ och $G' = 0$, så är $F_1' - F_2' = 0$, d.v.s. $F_1 = F_2 + C$.
- Två funktioner F_1 och F_2, som är primitiva funktioner till samma $f(x)$ i ett givet intervall, skiljer sig åt med en additiv konstant:

$$F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \iff F_1(x) - F_2(x) = C \iff F_1(x) = F_2(x) + C\,.$$

– Låt $F(x)$ vara en (annan) primitiv funktion till $f(x)$. Då är $F_0(x) = F(x) + C$.

Insättnings-formeln

$F_0(a) = 0 = F(a) + C \iff C = -F(a)$, så att $F_0(x) = F(x) - F(a)$.

$$F_0(b) = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

- $\int_a^b f(x)dx$ kallas bestämd integral och är ett tal.
- $\int f(x)dx$ kallas *obestämd integral* och betyder *alla* primitiva funktioner till $f(x)$. De är , enligt ovan, $F(x) + C$, där $F(x)$ är *någon* primitiv funktion till $f(x)$.
- $$\int x^\alpha = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, & \text{om } \alpha \neq -1 \\ \ln|x|, & \text{om } \alpha = -1 \end{cases}$$
- $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C$, eftersom $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{x^2+1}$.
- $\int \tan x\,dx = C - \ln|\cos x|$, eftersom $\frac{d}{dx}(-\ln|\cos x|) = -\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = \tan x$.

- $\displaystyle\int_6^9 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_6^9 = \ln(3/2)$, eftersom $\displaystyle\frac{d}{dx}\,\ln x = \frac{1}{x}$.
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \ln|\tan(x/2)| + C$, eftersom $\displaystyle\frac{d}{dx}\,\ln|\tan(x/2)| = \frac{1}{\sin x}$.
- $\displaystyle\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}\,e^{3x} + C.$
- $\displaystyle\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$
- $\displaystyle\int \sin^3 x dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$
- $\displaystyle\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}\,a^x + C$ och p.s.s. $\displaystyle\int e^{k\,x} dx = \frac{1}{k}\,e^{k\,x} + C.$

Exempel 7.1

Bestäm *en* primitiv funktion till $\sqrt{2x}$, bestäm alla primitiva funktioner till $\sqrt{2x}$ och bestäm $\displaystyle\int_2^8 \sqrt{2x}\,dx$.

Lösning:

(*En* primitiv funktion)

$$f(x) := (2x)^{1/2} \Longleftarrow F(x) = \frac{2}{3}(2x)^{3/2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot x\sqrt{2x}.$$

(*alla* primitiva funktioner)

$$\frac{2}{3} \cdot x\sqrt{2x} + C$$

(En bestämd integral)

$$\int_2^8 f(x)dx = \left[\frac{2}{3} \cdot x\sqrt{2x}\right]_2^8 = \frac{56}{3}.$$

En liten regel Om $f(x)$ har primtiv funktion $F(x)$, har $f(kx+m)$ primitiv funktion $\dfrac{1}{k}\,F(kx+m)$ för $k \neq 0$; När den inre funktionen är ”linjär”, d.v.s. $z = kx+m$ kan man ”kompensera” för den inre derivatan genom att dividera med k, ex.vis

$$\int \sqrt{3x+1}dx) = \int (3x+1)^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}(3x+1)^{3/2} \cdot \frac{1}{3} + C = \frac{2(3x+1)\sqrt{3x+1}}{9} + C.$$

Tre moment vid beräkning av integral

1. Omskrivning av integranden *innan* integration.
2. Integration, d.v.s. bestämning av primitiv funktion och eventuellt insättning av övre och undre gräns.
3. Omskrivning/förenkling av svaret.

Derivata och integral

I Ex.vis är $\displaystyle\int 2x\,dx = x^2 + C$ och därefter derivata $D(x^2+C) = 2x$, som ger tillbaka den ursprungliga funktion $f(x) := 2x$. Allmänt är $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)$.
Integral och derivata tar ut varandra i den ordningen.

II Ex.vis är $\displaystyle\frac{d}{dx}\,x^2 = 2x$ och därefter $\displaystyle\int 2x\,dx = x^2 + C$. Allmänt är $\displaystyle\int \left[\frac{d}{dx} f(x)\right]\,dx = f(x) + C$.
Derivata och integral tar ut varandra i den ordningen, nästan.

- Ovanstående leder till att beviset av en identitet
$$\int h(x)dx = H(x) + C$$
gör genom att derivera båda led, alltså visa att $H'(x) = h(x)$.

- Eftersom derivering har linjära egenskaper, så har även integraler det:
$$\int (a\,f(x) + b\,g(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx.$$
P.s.s. för bestämd integral.
Bevis genom att derivera båda led.

Exempel 7.2

Derivering m.a.p. övre gräns.

Analysens huvudsats säger att $D\int_a^x f(t)dt = f(x)$. Beräkna
$$D\int_0^{\ln x} e^{-t/2}\,dt.$$

Lösning:

Vi kan beräkna en primitiv funktion till integranden och sedan derivera. Men vi kan också derivera, direkt, den sammansatta funktionen, där $g(x) = \ln x$ är inre:
$$\frac{d}{dx}\int_0^{\ln x} e^{-t/2}\,dt = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{i.d.}} \cdot \underbrace{e^{-\ln x/2}}_{\text{y.d.}} = \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Integrationsmetoder P.I. , som är förkortning för *partiell integration*. Med den fixar man en integrand, som är en produkt. Den bygger på att derivatan av produkt. $(u\cdot v)' = u'v + uv'$. Vi integrerar båda led:
$$\int (u\,v)'dx = u\,v = \int u'v\,dx + \int u\,v'\,dx.$$
Vi flyttar om termerna och får
$$\int u'v\,dx = u\,v - \int u\,v'\,dx\,.$$
Här gör man ett byte och sätter $F(x) = u(x)$, så att $F'(x) = f(x) = u'(x)$ samt $v(x) = g(x)$. Då erhålls
$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)\,g(x) - \int F(x)\,g'(x)\,dx \qquad (4)$$

Exempel 7.3

Beräkna $\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$.

Lösning:

Vi väljer $x = g(x)$m den funktion som är deriverad i (4) och därmed $f(x) = \sin x$. Vi ser att
$$\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)dx = \sin x - x\cos x + C$$
så att
$$\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx = [\sin x - x\cos x]_0^{\pi/2} = 1.$$

V.S. , som är förkortningen för *variabelsubstitution.*

$$\int f(x)\,dx = \int f(x(t)) \cdot \frac{dx}{dt}\,dt. \tag{5}$$

Man sätter alltså $x = x(t)$, d.v.s. gör x till en funktion av en ny variabel t. När man gör V.S. ser det dock inte ut, riktigt som att man gör x till en funktion av t. Vi kan enkelt bevisa (5) genom att derivera båda sidor m.a.p. t.

Exempel 7.4

Betäm en primitiv funktion till $\dfrac{1}{x^2+4}$.

Lösning:

Vi gör omskrivningen $\dfrac{1}{x^2+4} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(x/2)^2+1}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+4}\,dx &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x/2)^2+1}\,dx = \{x = 2t,\ dx = 2dt\} = \\ &\frac{1}{4}\cdot 2\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\arctan t + C.\end{aligned}$$

Svar: En primitiv funktion är $\dfrac{1}{2}\arctan(x/2)$.

Exempel 7.5

Bestäm en primitiv funktion till $\tan x$.

Lösning:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} \cos x = t,\ \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x \\ dt = -\sin x\,dx,\ \text{d.v.s. täljaren med fel tecken.} \end{array} \right\} =$$

$$\int -\frac{1}{t}\,dt = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

Svar: En primitiv funktion till $\tan x$ är $-\ln|\cos x|$.

Rationell integrand En sådan funktion $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ skall *utvecklas.* Vi antar att p och q är polynom och att r är förkortat så långt som möjligt.

- Om $\operatorname{grad} p \geq \operatorname{grad} q$ så *polynomdivision.*
- Om $\operatorname{grad} p < \operatorname{grad} q$ så *uppdelning i partialbråk.*

Exempel 7.6

Beräkna integralen $\displaystyle\int \frac{2x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - x}\,dx$.

Lösning:

$\operatorname{grad} p = 3 \geq \operatorname{grad} q = 2$, alltså pol. div., som ger

$$r(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x^2 - x}.$$

Och nu PBU på den sista termen, ty där har täljaren graden 0 och nämnaren graden 2. Vi faktoriserar nämnaren och ansätter

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}.$$

Ansättningen i täljaren med A och B beror på att dessa har en grad lägre än respektive nämnare. Genom att sätta HL på MGN och identifiera täljarna i VL och HL får man

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)} \iff \begin{cases} & \text{VL} \quad \text{HL} \\ x^0: & 1 = -A \\ x^1: & 0 = A + B \end{cases} \iff A = -1,\, B = 1\,.$$

Alltså kan integralen skrivas

$$\int \left(2x + 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) dx = x^2 + x - \ln|x| + \ln|x-1| + C\,.$$

Exempel 7.7

Beräkna (a) $\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx$, (b) $\int \sin^3 x\, dx$.

Lösning:

(a) Detta är en bestämd integral. Vi skriver om integranden som $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$. Alltså är

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}\,.$$

(b) Detta är en obestämd integral. Vi skriver om integranden som $\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x = (1-\cos^2 x)\sin x$ och gör V.S. $\cos x = t \Rightarrow -\sin x\, dx = dt$, så att

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x\, dx &= \int (1-\cos^2 x)\sin x\, dx = \int (1-t^2)(-1)dt = \\ & \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C. \end{aligned}$$