1 Föreläsning VIII

1.1 Area mellan funktionskurvor

Exempel 8.1
Beräkna arean mellan $y = f(x) = x + 2$ och $y = g(x) = 4 - x^2$ med $x-$gränser $a < b$, där a är $x-$koordinatens skärningspunkt mellan kurvorna och $b = 0$.

Lösning

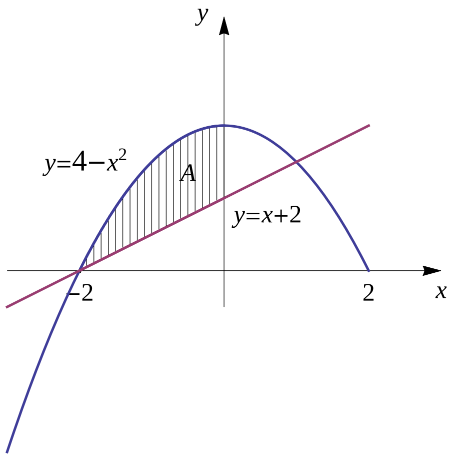
Skärningspunkten ges av

$$4 - x^2 = x + 2 \Longleftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Alltså är $a = -2$. Vi får arean som integralen

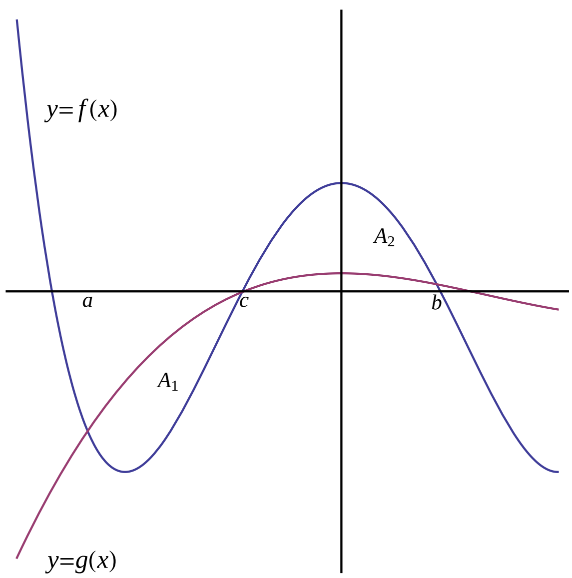
$$A = \int_{-2}^{0} (4 - x^2 - (x+2))dx \quad = \quad \int_{-2}^{0} (2 - x - x^2)dx =$$

$$\left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} = \frac{10}{3}$$



Kommentarer

- Om endera av kurvorna helt eller delvis ligger under $x-$axeln, får man ändå rätt area.
- Om man integrerar, som i exemplet, $f(x) - g(x)$ får man arean men med fel tecken. Detta justerar man lätt efter att ha integrerat.
- Om Kurvorna skära varandra enligt nedan



så är arean mellan kurvorna $A_1 + A_2$. Detta kan skrivas

$$\begin{aligned} \text{formellt:} \quad A_1 + A_2 &= \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \\ \text{tekniskt:} \quad A_1 + A_2 &= \int_a^c (g(x) - f(x)) dx + \int_c^b (f(x) - g(x)) dx. \end{aligned}$$

1.2 Mer om partiell integration

$$\int f(x) g(x)\, dx = F(x)\, g(x) - \int F(x)\, g'(x)\, dx \tag{1}$$

Rekommendationer Låt $p(x)$ vara ett polynom. För produkterna

$$p(x) \cdot \begin{cases} \sin kx \\ \cos kx \\ e^{kx} \end{cases} \quad \text{låt } p(x) = g(x) \text{ i } (1).$$

För produkterna

$$p(x) \cdot \begin{cases} \ln x \\ \arctan x \end{cases} \quad \text{låt } p(x) = f(x) \text{ i } (1).$$

1.3 Variabelsubstitution

Derivata igen Derivata av sammansatt funktion:

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = f'(x(t)) \cdot x'(t) \text{ eller } \frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Det senare skrivsättet kallas ju kedjeregeln.

Exempel 8.2

Beräkna integralen...

$$\begin{aligned} \int 2x \cdot e^{-x^2/2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x^2/2 = t = t(x) \Rightarrow \frac{dt}{dx} = x \\ \Longleftrightarrow x\, dx = dt \end{array} \right\} = \\ & 2 \int e^{-x^2/2} \underbrace{x\, dx}_{=dt} = 2 \int e^{-t} dt = C - e^{-t} = C - 2e^{-x^2/2} \text{ (Svar).} \end{aligned}$$

Kommentarer Differentialerna dt, dx, dy och df etc, är oändligt små tal, vilka tillhör en större mängd än de reella talen, *mängden av de hyperreella talen.*

1.4 Mer om integral av rationell funktion

Exempel 8.3

Bestäm en primitiv funktion till $h(x) = \dfrac{4x^3 - x + 1}{x^2 - 1}$.

Lösning

Ett rationellt uttryck, alltså en rationell funktion skall alltså utvecklas.

Efter pol.div. brukar PBU följa. I detta exempel är

$$h(x) = \{\text{pol.div.}\} = 4x + \frac{3x + 1}{x^2 - 1}.$$

Nu är den sista termen sådan att grad tälj $<$ grad nämn. Nämaren kan fakroriseras och hela andra termen är

$$\frac{3x + 1}{(x - 1)(x + 1)} = \{\text{PBU}\} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}.$$

> *Man ansätter med termer där nämnarna är de två faktorerna och täljarna har en grad lägre än nämnarna.*

Liknämnigt ger

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}.$$

Nämnarna är lika och alltså måste täljarna vara (identiskt) lika:

$$3x+1 = A(x+1)+B(x-1) \iff \begin{cases} & \text{VL} \quad \text{HL} \\ x^0: & 1 = A-B \\ x^1: & 3 = A+B \end{cases} \iff \begin{cases} A & = 2 \\ B & = 1 \end{cases}$$

Nu kan vi integrera alla termer:

$$\int h(x)dx = \int \left(4x + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) dx = 2x^2+2\ln|x-1|+\ln|x+1|+C.$$

Svar: *En* primitiv funktion är $H(x) := 2x^2 + 2\ln|x-1| + \ln|x+1|$.

Exempel 8.4

Beräkna integralen $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x-1}{x^3+x}dx$.

Lösning

Här är graden för täljaren lägre än för nämnaren, som är $x(x^2+1)$. Alltså endast PBU. Vi får två termer, som är bråk, där täljarna ansätts en grad lägre än nämnarna.

$$\frac{2x-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x\,(x^2+1)}$$

Detta ger ekvationssystemet

	VL		HL
x^0 :	-1	$=$	A
x^1 :	2	$=$	C
x^2 :	0	$=$	$A+B$

med tre ekvationer (grad 0, 1, och 2) och tre obekanta/variabler (A, B och C). lösningen är $A = -1$, $B = 1$ och $C = 2$. Integralen är alltså

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x-1}{x(x^2+1)}\,dx \quad = \quad \left[-\ln x + 2\arctan x + \frac{1}{2}\,\ln(x^2+1)\right]_1^{\sqrt{3}} =$$

$$-\ln\sqrt{3} + \ln 1 + 2\arctan\sqrt{3} - 2\arctan 1 + \frac{1}{2}\ln(3+1) - \frac{1}{2}\ln(1+1) =$$

$$\frac{1}{2}\ln(2/3) + 2\cdot\frac{\pi}{3} - 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln(2/3) + \frac{\pi}{6}.$$

2 Generaliserad integral

För en bestämd integral, där integrationsintervallet inte är kompakt, kallas motsvarande integral *generaliserad*. Det finns två typfall:

- Obegränsat integrationsintervall och
- obegränsad integrand.

Exempel 8.5

Integralen $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2e^{-2x}dx$ har obegränsat integrationsintervall. Man beräknar första $\int_0^b x^2 e^{-2x} dx$ och låter sedan $b \longrightarrow \infty$. En primitiv funktion fås med P.I.:

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-2x} dx &= x^2 \cdot \frac{e^{-2x}}{-2} + \frac{1}{2} \int 2x e^{-2x} dx = \\ & -\frac{x^2}{2} e^{-2x} - \frac{x}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x}\, dx = \\ & -e^{-2x} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right).\end{aligned}$$

Därmed är

$$\int_0^b x^2 e^{-2x} dx = \left[e^{-2x} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) \right]_b^0 = e^0 \cdot \frac{1}{4} - e^{-2b} \left(\frac{b^2}{2} + \frac{b}{2} + \frac{1}{4} \right) \longrightarrow \frac{1}{4}$$

då $b \longrightarrow \infty$.

Ex Beräkna $\int_0^1 \ln x dx$.

Lösning

Integranden $\ln x \longrightarrow -\infty$, då $x \longrightarrow 0_+$, alltså obegränsad integrand. Vi beräknar $\int_a^1 \ln x\, dx$ och låter sedan $a \longrightarrow 0_+$.

$$\int_a^1 \ln x\, dx = \{\text{P.I.}\} = [x \cdot \ln x]_a^1 - \int_a^1 x \cdot \frac{1}{x}\, dx = a\, \ln a - (1-a) \longrightarrow -1$$

då $a \longrightarrow 0_+$, eftersom $a \ln a \to 0$, då $a \to 0_+$, ett standardgränsvärde.

Exempel 8.6

Beräkna integralen Beräkna integralen $\int_1^\infty \frac{2x-1}{x^3+x} dx$.

Lösning

Vi har redan bestämt en primitiv funktion **Ex** $*$.

$$\int_1^b \frac{2x-1}{x^3+x} dx = \left[-\ln x + 2 \arctan x + \frac{1}{2}\, \ln(x^2+1) \right]_1^b .$$

Vi ser att det två logaritmiska termerna divergerar mot $\pm\infty$. Följande gränsvärde gör det ändå möjligt att få ut ett (ändligt) gränsvärde.

$$\begin{aligned}\int_1^b \frac{2x-1}{x^3+x} dx &= \left[\frac{1}{2}\, \ln \left| \frac{x^2+1}{x^2} \right| + 2 \arctan x \right]_1^b = \\ & 2(\arctan b - \arctan 0) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+1/b^2}{1} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1^2+1}{1^2} \right| \longrightarrow \\ & 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} (\pi - \ln 2)\ .\end{aligned}$$

Exempel 8.7

Beräkna $\int_1^\infty \frac{2x-1}{x^2(x+1)} dx$.

Lösning

PBU på integranden. Ansättningen är

$$\frac{2x-1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Liknämnighet ger möjlighet att identifiera de tre koefficienterna, som är $A = 3, \quad B = -1, \quad C = -3$. Vi beräknar $\displaystyle\int_1^b$ och låter sedan $b \to \infty$.

$$\int_1^b \frac{2x-1}{x^2(x+1)}dx = \left[3\ln x - 3\ln(x+1) + \frac{1}{x}\right]_1^b = -3\ln\left[1+1/b\right] + \frac{1}{b} + 3\ln 2 - 3\ln 1 - 1 \to 3\ln 2 - 1$$

då $b \to \infty$.