1 Föreläsning IX,

1.1 V.S. $t = \tan(x/2)$

Denna V.S. används för att beräkna integral med rationell integrand i variablerna $\sin x$ och $\cos x$, ex.vis

$$\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x}.$$

I boken finns V.S. $t = \tan(x/2)$. Vi börjar dock med

$$x = x(t) = 2 \arctan t. \tag{1}$$

Denna V.S. implicerar

$$\begin{array}{lrcl}
\text{(a)} & t & = & \tan(x/2) \\[2ex]
\text{(b)} & \dfrac{2t}{1+t^2} & = & \sin x \\[2ex]
\text{(c)} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & = & \cos x \\[2ex]
\text{(d)} & \dfrac{2dt}{1+t^2} & = & dx
\end{array}$$

Vi härleder (c) och (d).

$$\text{(c)} \quad \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)} = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = \cos x.$$

$$\text{(d)} \quad \frac{dx}{dt} = 2 \cdot \frac{1}{1+t^2}.$$

Exempel 9.1
Beräkna

$$\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x}.$$

Lösning

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{2}{1-t^2}\, dt = \{\text{PBU}\} = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) dt = \\
&= \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + C \Longrightarrow \\
\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x} &= \left[\ln \left| \frac{\tan(x/2)+1}{\tan(x/2)-1} \right| \right]_0^{\pi/3} = \ln \left| \frac{1/\sqrt{3}+1}{1/\sqrt{3}-1} \right| = \ln \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} \right) = \\
&= \ln \left(\frac{1}{2} \left(1+\sqrt{3}\right)^2 \right) = \ln \left(2+\sqrt{3}\right).
\end{aligned}$$

En speciell primitiv funktion, som behövs för att integrera vissa rotfunktioner:

$$D \ln(x + \sqrt{x^2+a}) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Exempel 9.2
Bestäm en p.f. till $h(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Lösning

Vi försöker med P.I.

$$\begin{aligned}
\int h(x)dx &= \int 1 \cdot \sqrt{x^2+1}\,dx = x \cdot \sqrt{x^2+1} - \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \\
&= x \cdot \sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = x \cdot \sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \\
&\iff 2\int h(x)dx = x \cdot \sqrt{x^2+1} + \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C \\
&\iff \int h(x)dx = \int \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left(x \cdot \sqrt{x^2+1} + \ln(x+\sqrt{x^2+1})\right) + C.
\end{aligned}$$

Svar: En p.f. är $= \frac{1}{2}\left(x \cdot \sqrt{x^2+1} + \ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)$.

Kommentar

Vi ser här ett exempel på där den ursprungliga integralen dyker upp i HL. Nu kommer ett liknande exempel, som dock inte lyckas.

Exempel 9.3
Beräkna integralen...

$$\int \tan x\,dx = \int \underbrace{\sin x}_{=f(x)} \cdot \frac{1}{\cos x}\,dx = -\cos x \cdot \frac{1}{\cos x} + \int \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = -1 + \int \tan x\,dx.$$

Vi kan förkorta $\int \tan x\,dx$ i båda led och får $0 = -1$. Dels klarar vi inte beräkna integralen och dels får vi $0 = -1$. Det sista beror på att båda led är lika sånär som på en additiv konstant.

1.2 Mer om generaliserad integral

Kriterier för konvergens

Vi har sett i exempel 8.5, att

$\int_0^\infty x^2 e^{-2x}\,dx = \frac{1}{4}$ är konvergent. Vi sätter $f(x) := x^2 e^{-2x}$. För det första är en p.f. av formen $F(x) = (C_2x^2 + C_1x + C_0)e^{-2x}$ $\left(= -e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)\right)$,

d.v.s. ett polynom av grad 2 gånger e^{-2x}.

Att integralen har *ett* värde $-C$ innebär ju att integralen är *konvergent*, (annars *divergent*).

Hur vet vi om en integral $\int_0^\infty p(x)e^{-kx}dx$ är konvergent, där $p(x)$ står för ett polynom? Svaret är att en p.f. till $p(x)e^{-kx}$ är en funktion $q(x)e^{-kx}$, där $\operatorname{grad} p(x) = \operatorname{grad} q(x)$. Observera att $q(x)$ är en summa av termer $a_j x^j$, alltså potensfunktioner. Vi vet att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_j x^j}{e^{kx}} \longrightarrow 0, \text{ då } x \to \infty.$$

Det ger att termen

$$q(b)e^{-kb} = \frac{q(b)}{e^{kb}} \longrightarrow 0 \text{ om } b \to \infty.$$

Det innebär att $k > 0$ ett ekvivalent villkor för att integralen är konvergent.

$$\boxed{\int_0^\infty p(x)e^{-kx} dx \text{ konvergent } \iff k > 0.}$$

Konvergens av integrand som är en potensfunktion

I exempel 8.7 har vi integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2x-1}{x^3+x^2}\, dx = 3\ln 2 - 1$. Den har ett entydigt ändligt värde och är alltså konvergent. Hur kan man se det *innan* man beräknar integralen? Vi förstår att det beror på grad av täljare och nämnare. Mer exakt är $\operatorname{grad}(x^3 + x) - \operatorname{grad}(2x - 1) = 2$.

Vi beräknar därför $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ för olika reella a. Först antar vi att $\alpha = 1$. Då är

$$\int_1^b \frac{1}{x}\, dx = \ln b \to \infty \text{ då } b \to \infty \text{ alltså divergent.}$$

Antag nu att $\alpha \neq 1$. Då är en p.f.

$$\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \text{ så att } \int_1^b \frac{1}{x^a}\, dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^b = \frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha} - 1\right)$$

som konvergerar mot $\dfrac{1}{\alpha - 1}$, omm $\alpha > 1$.

Vi ser att $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ är konvergent omm $\alpha > 1$ (2)

P.s.s. kan man visa att

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ är konvergent omm $\alpha < 1$ (3)

I exempel 8.6 och 8.7 är det differensen mellan täljarens och nämnarens grad, som är $\alpha = 2 > 1$, vilken gör att integralerna är konvergenta.

Exempel 9.4
Är integralerna nedan konvergenta?

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

(b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^\alpha+1}}$.

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Lösning

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ är konvergent eftersom nämnaren "gradtal" är $3\cdot 1/2 = 3/2 > 1$. Ett rigoröst bevis följer längre fram.

(b) För integralen beror konvergens/divergens på α. Man kan visa att för $\alpha > 0$ är det konvergens, annars divergens.

(c) $\alpha = 1/2 < 1$, därmed konvergent.

$$\int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_c^1 x^{-1/2}dx = \left[2x^{1/2}\right]_c^1 \longrightarrow 2$$

då $c \to 0_+$.

I (a) finns ingen elementär primitiv funktion. (b) kan lösas med V.S.

1.3 Två kriterier för konvergens

För att avgöra om en generaliserad integral är konvergent (eller divergent) tar vi upp två satser.

1. **Sats. Jämförelsekriteriet**
   Antag att $f(x) \geq g(x) \geq 0$ på $D_f = D_g = [a,\infty)$. Då gäller implikationen
   $$\int_a^\infty f(x)dx \text{ konvergent } \Longrightarrow \int_a^\infty g(x)dx \text{ konvergent.} \tag{4}$$

2. **Sats. Ett nödvändigt villkor för konvergens.**
   Antag att
   $$\int_a^\infty f(x)dx$$
   är konvergent och att $f(x) \geq 0$ samt avtagande. Då gäller att $f(x) \longrightarrow 0$, då $x \to \infty$.

1. Bevisskiss av jämförelsekriteriet: För varje $b > a$ gäller

$$\int_a^b f(x)dx =: F(b) \geq \int_a^b g(x)dx =: G(b).$$

Både vänster och höger integral är växande i b eftersom funktionerna ≥ 0. Vänster integral växer mot ett reellt tal A. Således växer den HL mot ett tal $B \leq A$.

2. Bevis av det nödvändiga villkoret: Sätt $F(b) := \displaystyle\int_a^b f(x)dx$. D å gäller att $F(b) \longrightarrow A$, där $A = \displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$

$$F(b) - F(b-1) = \int_{b-1}^b f(x)dx \geq f(b) \geq 0 \text{ och VL } \longrightarrow A - A = 0$$

då $b \to \infty$.

Exempel 9.5

Exempel 9.4 (a): Vi visar att integralen är konvergent och då räcker det att integrera över $[1, \infty)$. Integranden $0 \leq g(x) := \dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}} \leq \dfrac{1}{x^{3/2}} =: f(x)$ och

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\, dx = \ldots = 2$$

och därmed konvergent enligt jämförelsekriteriet (4).

Kommentar

Man kan visa att det exakta värdet är

$$\frac{2\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}{\sqrt{\pi}} \approx 2.804\,.$$

Exempel 9.6

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

är divergent eftersom $\sqrt{x} = x^{1/2}$ och $\alpha := 1/2 \not> 1$.