

1 Kryssuppgifter III, L9MA20 och LGMA20, vt 2019 för redovisning 17:e maj

1. Betrakta funktionen $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ om } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & , \text{ om } x > 0 \end{cases}$

- (a) Konstruera kurvan $y = f(x)$ (med angivande av stationära punkter, asymptoter och var funktionen är konvex eller konkav). 2p
- (b) Visa att både $f'(0)$ och $f''(0)$ existerar genom att Beräkna dessa. Kan man dra slutsatsen att $f^{(n)}(0)$ existerar för alla $n = 0, 1, 2, \dots$? 1p
- (c) En typ av funktion som används i högre matematik, är en funktion, sådan att den är $f(x) \neq 0$ endast i ett begränsat intervall (a, b) och $f^{(n)}(x)$ existerar för alla $x \in \mathbb{R}$. Konstruera en sådan funktion med utgångspunkt att $f^{(n)}(0)$ existerar för vår funktion ovan. Rita en sådan kurva med Geogebra där $a = -1$ och $b = 2$. 2p

2. Betrakta funktionen $f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}$.

- (a) Konstruera kurvan för $x > 0$. För en stationär punkt kan vi inte få ett exakt analytiskt värde. Ge ett approximativt (numeriskt) värde (Försök med Newton-Raphsons metod) för den stationära punkten. 1p
- (b) Integralen $\int_0^\infty f(x)dx$ är inte elementär, vilket betyder att vi inte kan beräkna den med P.I. eller V.S. Ändå kan man visa att

$$\int_0^\infty f(x)dx = \frac{\pi^4}{15}.$$

Beräkna m.h.a. resultatet ovan, integralen

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x + 1} dx.$$

Ledning: Ett algebraiskt knep är att utnyttja konjugatregeln för uttrycket $e^{2x} - 1$ efter en lämplig V.S. 3p