

1 Trigonometriska identiteter

1.1 Jämn och udda funktion

$$\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$$

1.2 En av fyra grundläggande additionsformler

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (1)$$

1.3 Övriga additionsformler (identiteter)

Ur (1) kan alla andra härledas: Byt β mot $-\beta$:

$$\cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta).$$

Förenkling av VL och HL ger

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (2)$$

Byt α mot $\pi/2 - \alpha$ i (1):

$$\cos(\pi/2 - \alpha - \beta) = \cos(\pi/2 - \alpha) \cos \beta + \sin(\pi/2 - \alpha) \sin \beta.$$

Observera att VL = $\cos(\pi/2 - (\alpha + \beta))$ så VL och HL blir

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \quad (3)$$

Genom att byta β mot $-\beta$ i (3) erhålls

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \quad (4)$$

1.4 Formler för dubbla vinkeln

Genom att sätta $\beta = \alpha$ i (3) erhålls

$$\sin(\alpha + \alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha$$

eller förenklat

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha. \quad (5)$$

Genom att sätta $\beta = \alpha$ i (1) erhålls

$$\cos(\alpha - \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin(-\alpha)$$

eller förenklat fås trigonometriska ettan:

$$1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \quad (6)$$

Genom att sätta $\beta = \alpha$ i (2) erhålls

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$$

eller förenklat

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha. \quad (7)$$

M.h.a. (6) kan vi byta $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ och få

$$\cos 2\alpha = (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha.$$

P.s.s. kan vi byta $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ och få

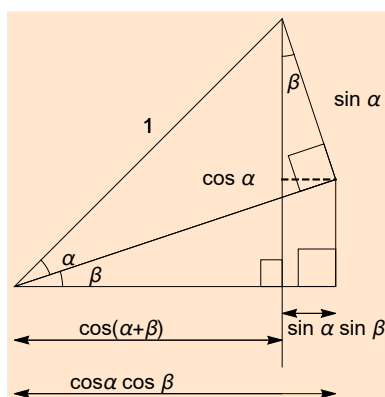
$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha).$$

Genom förenkling får vi

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1. \quad (8)$$

1.5 Bevis av formel/identitet (2)

M.h.a. figuren nedan kan man visa för spetsiga vinklar, identiteten (2).



Den vågräta streckade linjen har längd $\sin \alpha \sin \beta$.