Algebra ur ett matematiskt, historiskt och didaktiskt perspektiv

En litteraturstudie om karakteristiska svårigheter och undervisning om skolalgebra

Hilma Carlsson &
Amanda Larsson

Ämneslärarprogrammet med
inriktning mot 7-9

Examensarbete:	15 hp
Kurs:	L9MA1G
Nivå:	Grundnivå
Termin/år:	VT 2017
Handledare:	Johanna Pejlare
Examinator:	Laura Fainsilber
Kod:	VT17-3001-001-L9MA1G

Nyckelord: algebra, vardagsnära problemlösningsuppgifter, tredjegradsekvation, karakteristiska svårigheter, symbolens utveckling, lärande som tillägnande, lärande som deltagande, begreppsbildning

Abstract

Den här uppsatsen behandlar algebra, dess historia, elevers svårigheter vid lärande av ämnet och olika synsätt på att undervisa algebra utifrån matematiklärare, matematikdidaktiker och matematik historiker. Med detta arbete försöker vi besvara frågor som rör hur algebran har utvecklats genom historien, vad det finns för olika tillvägagångssätt vid algebraundervisning och vilka svårigheter elever har då de arbetar med algebra. De befintliga undervisningsmetoderna för algebra har ännu inte utvärderats tillräckligt väl för att finna en enskild metod som passar alla elever. Däremot har de flesta studier vi tagit del av pekat på att de mest karakteristiska svårigheterna är begreppsförståelse och bristande kunskaper i aritmetik. Vi valde att närmare undersöka undervisningsmetoden där vardagsnära problemlösningsuppgifter är centralt inom algebra och fann potential för vidare forskning.

Förord

Vi vill tacka Johanna Pejlare för hennes handledning och rekommendationer om väsentlig litteratur under vårt examensarbete. Vi vill även rikta ett tack till Thomas Lingefjärd som varit till hjälp med den matematiska gestaltningen. Slutligen vill vi också tacka de tre gymnasie-elever som delade sina tankar om algebra vilket gav vårt arbete ett bredare perspektiv.

Innehållsförteckning

1 Bakgrund

Under våra VFU-perioder har vi båda arbetat till största delen med algebra-undervisning. Vi har haft förmånen att undervisa samma elever från årskurs 7 till årskurs 9 och har därför haft möjlighet att följa deras utveckling i algebra och deras resa med matematiken. Vi har då upptäckt att det finns många elever som upplever svårigheter med algebran i såväl problemlösning som i ekvationslösning. De svårigheter vi framförallt har sett är balansräkning, prioriteringsregler och begreppsförståelse. Våra iakttagelser bekräftas av TIMSS-rapporten från 2015 som visade överlag ett förbättrat resultat i matematiken. Detta gällde dock inte områdena geometri och algebra där resultatet visade att de svenska eleverna fortfarande har svårigheter med dessa områden (Skolverket, 2016).

En specifik upptäckt som vi båda lade märke till var att många av eleverna fann det irrelevant att använda algebra vid vardagsnära problemlösningsuppgifter. Eleverna klarade oftast att lösa uppgifterna utan algebra och vi upplevde då att det var svårt att motivera varför algebra skulle användas vid dessa problemlösningsuppgifter. Vi började då fundera över hur man mest lämpligt introducerar algebra i skolan. I syftet i kursplanen för matematik på grundskolan kan man läsa att

> Eleverna ska även ges förutsättningar att utveckla kunskaper för att kunna tolka vardagliga och matematiska situationer samt beskriva och formulera dessa med hjälp av matematikens uttrycksformer.
> (Skolverket, 2011a)

Vår nyfikenhet kring detta gjorde det naturligt för oss att välja algebra som område för vårt första examensarbete. I vår litteraturstudie kommer vi därför att undersöka hur man kan undervisa algebra och vilka svårigheter elever stöter på i sin resa med algebra.

1.1 Syfte och frågeställningar

Syftet med vårt examensarbete är att fördjupa våra kunskaper inom algebra och att finna de kritiska aspekterna för algebraundervisning. Utifrån detta syfte har nedanstående frågeställningar formulerats.

- Hur utvecklades algebran genom matematikens historia?
- Vilka är de karakteristiska svårigheterna för elever vid arbete med algebra?
- Vad är skillnaden mellan aritmetisk och algebraisk problemlösning av vardagsnära situationer?

2 Metod och material

Vårt examensarbete är en litteraturstudie vilket innebär att vi endast har refererat till tidigare publikationer och inte genomfört egna undersökningar. För att finna dessa tidigare utgivna publikationer har vi använt oss utav framförallt Göteborgs Universitetsbibliotek men även Göteborgs stadsbibliotek och Matematikbiblioteket vid Matematiska vetenskaper. Sökord som vi använde för att hitta relevant litteratur var bland annat *algebra, history of algebra, algebrans historia, teaching algebra, algebra vardagssituation, algebra real-world problem.*

Den historiska delen av vårt arbete har vi framförallt grundat på Jan Thompsons bok *Matematiken i historien*. Flera artiklar som vi hittade hade refererat till Thompson, vilket gjorde att vi ansåg den som tillförlitlig. Vi har även utgått ifrån matematikern Morris Klines bok *Mathematical thought from ancient to modern times* och matematikhistoriken Victor Katzs bok *A history of mathematics: An introduction.*

Den didaktiska delen av vårt arbete har vi dels baserat på Jeppe Skott, Kristine Jess, Hans Christian Hansen och Sverker Lundins bok *Matematik för lärare: Delta, Didaktik* dels ett antal vetenskapliga artiklar och avhandlingar. Artiklarna som användes till den didaktiska delen hittade vi dels från våra sökningar som vi nämnde ovan, dels genom att titta på artiklar, böcker och avhandlingar som refererats till i de artiklar vi redan hittat.

Utöver litteraturen som vi använt oss av har vi även ställt frågan *Vad är algebra* till tre olika gymnasieelever. Dessa tre elever går olika program och läser då var sitt spår i matematik, a, b och c. Anledningen till vår miniintervju var att på ett smidigt sätt vinkla in diskussionsdelen av vår litteraturstudie till dagens elevers syn på algebra. Vi är förstås väl medvetna om att tre elevers uppfattning om vad algebra är inte kan svara för elevers generella uppfattning om algebra.

3 Vad är algebra?

I detta kapitel redogörs kortfattat hur algebran har utvecklats genom historien och vilka matematiker som har vart betydelsefulla för algebran. Kapitlet innehåller en fördjupning i symbolens utveckling samt om hur historien om tredjegradsekvationens lösning utspelade sig. Vidare kommer även den matematiska lösningen av en tredjegradsekvation att presenteras. Slutligen behandlas hur algebran ser ut idag.

3.1 Vad är algebra enligt elever?

Innan vi fördjupade oss i algebrans historia och vad algebra är bad vi tre elever på gymnasiet att besvara vad algebra är. Nedan ses deras svar.

> Algebra är matte med bokstäver. Det är ett sätt att lösa problemlösningar när man ska få reda på till exempel ålder, där x eller y visar en okänd siffra. Man kan använda sig av flera variabler. Tror också att det är en förenkling på saker.
>
> Elev åk 1 Ekonomilinjen

> Algebra är en matematisk term. Algebra och ekvationer är det enda jag vet, så misstänker att det kan ha att göra med att man ska räkna ut något utan att veta alla värden.
>
> Elev åk 3 Bygglinjen

> Algebra är viktigt för all högre matematik och en bred gren inom matematiken. Det är metoden som används för att ta reda på obekanta variabler i ekvationer. Många barn och ungdomar ogillar algebran men det går inte att blunda för hur mycket nytta man kan ha av den, även i det vardagliga livet. Personligen använder jag mig till viss grad av algebra i situationer man annars kanske inte tänker på att använda det, som i andra skolämnen än matematik, packning och matlagning. Vi har tur att den är såpass utvecklad som den är idag, annars hade många saker vi nu tar för givet varit svårare att handskas med.
>
> Elev åk 2 Naturvetenskapslinjen

3.2 Algebrans Historia

Begreppet algebra härstammar från ordet *al-Jabr*. Den persiske matematikern och astronomen Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (780-850) var den förste som använde sig av ordet al-Jabr i sina utgivna arbeten, men han ger ingen tydlig förklaring på begreppet. Dock berättar traditionen att betydelsen av al-Jabr är återställande. Al-Jabr är indelad i tre delar; ekvationslösning, mätningar inom geometri och invecklade kalkyler (Thompson, Martinsson, Martinsson & Thompson, 1994).

Nedan följer en historisk tillbakablick över algebrans utveckling med en fördjupning i försöken att lösa tredjegradsekvationer och den matematiska lösningsmetoden.

3.2.1 Före renässansen

Under de tidiga civilisationerna fanns stora behov av att lösa enkla vardagliga situationer med hjälp av matematik, inte minst för den babyloniske köpmannen någon gång under 2000-1000-talet f.Kr. Då han skulle beräkna hur mycket mer han kunde ta betalt för en säck korn jämfört med inköpspriset för att kunna gå med en viss summa i vinst, var han tvungen att använda sig av en andragradsekvation dock beräknades denna muntligt och utan vetskapen om att det var en andragrads-ekvation (Thompson, 1996).

Redan vid denna tid fanns det färdiga regler i form av recept om hur man skulle lösa andragradsekvationer. Recepten var anpassade för positiva rationella tal, där baby-lonierna använde sig av tabeller för att finna värdet av kvadratrötterna. Värdena i tabellerna fick man troligen fram via geometriska metoder. Babylonierna kände till Pythagoras sats, även om den då inte var bevisad, och med hjälp av satsen och geometri kunde man få fram ett närmevärde för icke rationella rötter (Thompson, 1996).

Enligt matematikdidaktikern Constanta Olteanu (2001) hade både babylonierna och araberna en långt framskriden algebra. Algebran handlade då om ekvationer uttryckta i fullständiga ord till skillnad från dagens ekvationer med variabler och likhetstecken. Olteanu menar att de första som lär ha använt sig av bokstäver för att beteckna tal var antikens greker (700-300 f.Kr.). I Europa infördes variablerna omkring år 1600 trots att algebran introducerades redan på 1200 talet.

3.2.2 Renässansen (1400-1600)

Under renässansen utvecklades algebran drastiskt, av främst fyra personer; Francois Viète, Réne Descartes, Simon Stevin och John Wallis. De kallades barn av renässan-sen på grund av sin önskan att modernisera och ge nytt liv till en universell mate-matisk vetenskap (Thompson, 1996).

Tack vare renässansen som medförde att tidigare kända vetenskapsmäns arbeten översattes och blev tillgängliga för betraktaren kunde betraktaren ifrågasätta och utveckla den symboliska algebran. De författare som blev betydelsefulla för detta var bland annat de grekiska författarna Euklides, Diophantus och Pappus men även författare som al-Khwarizmi och Leonardo från Pisa med grunder i den orientaliska algebran. Den grekiska och den orientaliska algebran sammanfördes nu av de fyra barnen av renässansen och därigenom föddes alltså den moderna algebran och det symboliska talbegreppet (Thompson, 1996).

Denna tid har senare kallats *den naturvetenskapliga revolutionen*. Ett paradigmskifte skedde tack vare främst barnen av renässansen. Efter paradigmskiftet befann sig algebran i en guldålder.

3.2.3 Barnen av renässansen

Francois Viète (1540-1603) var den förste att ge ut ett arbete i symbolisk algebra där han generaliserade det grekiska aritmos (talet). Symbolisk algebra innebar att algebran inte uttrycktes med fullständiga meningar utan som symboliska förkortningar. Viète var även den förste att trotsa Euklides och grekernas filosofi om att det var förbjudet att multiplicera och dividera olika storheter med varandra. Tack vare att Viète använde sig av bokstäver i sina lösningar såg han att man exempelvis kunde dividera volym med area till att få ut en längd. Det symboliska hanterandet av matematik möjliggjorde att matematiska formler kunde framställas (Thompson, 1996).

Réne Descartes (1596-1650) funderade mycket över hur matematiken hade upptäckts och varför den var som den var. Hans ambition var att hitta en universell matematik vilket han lyckades med när han upptäckte att de karakteristiska för matematiken var mätning och ordning. Denna var inte begränsad till ett specifikt område utan kunde användas på valfri tillämpning. Descartes konstaterade att storheter i olika dimensioner hörde samman, exempelvis area och volym. Vilket gjorde att även han, likt Viète, såg att multiplikation och division var möjligt för storheter av olika slag. Under sitt arbete forskade Descartes om utsträckta kroppar ur aritmetiskt och geometriskt perspektiv. Hans forskning lade grunden för *den naturvetenskapliga revolutionen* (Thompson, 1996).

Simon Stevin (1548-1620) var inne på samma linje som Viète och Descartes och riktade kritik mot den grekiska synen på enheten. Han menade att enheten är ett tal eftersom enheten är en del av talet. Grekerna däremot menade att *"tal är mångfalder av enheten och enheten är ingen mångfald."* (Thompson, 1996, s. 223). Stevin såg även, likt Viète och Descartes, en symbolisk förståelse för rationella tal. Denna symboliska förståelse blev betydelsefull då reella tal skulle definieras vid 1800-talets slut (Thompson, 1996).

John Wallis (1616-1703) var den fjärde och sista vetenskapsmannen som presenteras i detta avsnitt och som bidrog till paradigmskiftet även kallat *den naturvetenskapliga revolutionen*. Han, likt de andra tre vetenskapsmännen, kunde se tal som objekt. Till sin natur är storheterna och talen tecken, de är symboler som inte bara representerar sig själva utan *är* även matematiska objekt (Thompson, 1996).

3.3 Symbolernas utveckling

Före renässansen användes ord för att beskriva matematiska operationer vilket gjorde algebran komplicerad. Diophantus var den första att införa förkortningar och ett fåtal symboler för att effektivisera algebran. Före renässansen använde de olika matematikerna sina egna förkortningar och det fanns inget universellt skrivsätt vid matematiska operationer. Först då matematiken började expandera kände matematikerna en press på att börja använda sig utav gemensamma symboler. Detta uppskattades inte av den tidens matematiker och de förstod inte fördelarna med ett gemensamt skrivsätt. Det kom att dröja innan matematikerna accepterade den nya symboliken (Kline, 1972).

En av de första förkortningarna som gjordes för att underlätta de matematiska operationerna var att man skrev p istället för *plus* och m istället för *minus*. I början av renässansen introducerades istället symboler för plus och minus, $+$ och $-$. Symbolen för *multiplikation* introducerades som $\times$. Produktsymbolen kritiserades eftersom den lätt kunde förväxlas med variabeln x. År 1557 introducerades tecknet för *likhet*, $=$, av Robert Recorde som var den första att skriva en avhandling om algebra på engelska. Tidigare hade likhetstecknet haft många olika utseenden, så som $\sim$ och $\propto$. Varför man slutligen landade i $=$ berodde på att Recorde ansåg att det finns inget som är så lika som två parallella linjer. Andra symboler som uppkom under renässansen var , $<$, $>$, $\sqrt{\ }$, parenteser av alla tre slag. Kubikroten skrevs dock på denna tiden som $\sqrt{c.}$. Många av de symboler från renässansen är de vi använder idag. Nedan jämförs hur Cardano, presenteras närmare i kapitel 3.4, skrev matematiskt med skrivsättet som uppkom under renässansen.

$$\sqrt{7+\sqrt{14}} \quad \text{skrevs som} \quad R.V.\ 7.p{:}\ R14. \quad \text{(Kline, 1972)}$$

Eftersom det universella skrivsättet inte hade etablerat sig än bland de stora matematikerna användes olika skrivsätt för en ekvation av grad två eller större. Det som skilde var hur de skrev de okändas potenser. Descartes var den förste store matematikern som anammade x som obekant. Han började först att använda potensform när den obekanta skulle upphöjas till tre eller mer. x upphöjt till två skrev han som xx. Det var först år 1801 som Gauss införde x^2 som standard form för x multiplicerat med x (Kline, 1972).

Den mest betydelsefulla ändringen av algebrans karaktär introducerades med Viètes symboler. Han studerade arbeten skrivna av bland annat Cardano, Tartaglia, Bombelli, Stevin och Diophantus. Ur detta föddes idén om att systematiskt använda bokstäver i matematiken. Att använda bokstäver istället för specifika siffror var inget nytt, både Euklides och Aristoteles hade tidigare använt sig av detta men inte frekvent utan mer av en slump. Viète var den förste som använde sig av bokstäverna på ett meningsfullt och systematiskt vis. Inte bara genom att representera en obekant men även som generella koefficienter. Han använde konsonanter för de kända storheterna och vokaler för de okända storheterna. Han kom att kalla sin symboliska algebra *logistica speciosa*, till skillnad från *logistica numerosa*, det vill säga aritmetiken. När Viète studerade den generella andragradsekvationen insåg han att han studerade en hel klass av uttryck. I Viètes bok *Isagoge* drog han en linje mellan *logistica speciosa* och *logistica numerosa,* alltså mellan algebra och aritmetik (Kline, 1972).

Viète beskrev algebra som en metod för att göra matematiska operationer på *species*, tingets form. Han beskrev också att aritmetiken hanterade siffror. Algebran blev en studie för generella former och ekvationer eftersom den generella formeln täcker upp för oändligt många specifika fall. Viète sökte efter att kunna etablera de algebraiska reglerna som fanns dolda i geometrin från de gamla grekernas arbeten. Han såg flera likheter med Diophantus arbete. Diophantus hade gjort många utvecklingar av algebraiska uttryck genom att använda regler som han inte bevisade fullständigt. Viète ville återuppliva dessa regler och färdigställde den generella uttrycksformen för kvadratiska uttryck. Han uttryckte regeln enligt följande:

$$a\ cubus + b\ in\ a\ quadr.3 + a\ in\ b\ quad.3 + b\ cubo\ aequalia\ a + b\ cubo\ ,$$

som idag skrivs

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3.$$

Viètes efterföljare anammade fort idén om att använda generella koefficienter. Detta accepterande blev dock inget sensationellt inom symbolernas användning inom matematiken eftersom det föll sig naturligt att använda bokstäver vid beräkningar. Förbättringar av Viètes användning av bokstäver gjordes av Descartes. Dessa förbättringar var att kända storheter representerades av bokstäver i början av alfabetet och okända storheter av bokstäver i slutet av alfabetet. Detta sätt att beteckna storheter används än idag. Både Viète och Descartes betecknade enbart positiva storheter med bokstäver, det kom att dröja fram till 1653 då John Hudde (1628-1704) introducerade bokstäver som representationer även för negativa storheter (Kline, 1972).

En annan viktig person för symbolernas historia var Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 -1716). Han gjorde långvariga studier om olika skrivsätt och experimenterade med symboler. Han frågade sedan samtida matematiker om deras åsikter och valde därefter ut det bästa skrivsättet. Han uppskattade verkligen vad bra symboler underlättade för tänkandet (Kline, 1972). Ett av de tecken som Leibniz införde för en räkneoperation var $\cdot$, som ersatte $\times$, pricken är idag standardsymbolen för multiplikation (Miller, 2016, 4 april).

Tyvärr infördes många slumpmässiga och ogenomtänkta symboler av matematiker som då varken uppskattade eller förstod att dessa skulle bli en standard som används än idag (Kline, 1972). Ett exempel är symbolen för division som Leibniz betecknade med $:$ som snabbt därefter byttes ut till $\div$ av Johann Rahn (1622-1676) som idag är en standardsymbol för division (Miller, 2016, 4 april).

3.4 De spännande försöken att lösa tredjegradsekvationer

En viktig historia som skedde för algebrans utveckling precis i början av den vetenskapliga revolutionen, och alltså precis före barnen av renässansen var verksamma, var hur lösningen för tredjegradsekvationen uppkom. Denna skulle sedan utvecklas ytterligare av Viète.

Enligt Katz (1998) och Kline (1972) var det många som försökte lösa tredjegradsekvationer men endast ett fåtal lyckades. Den förste som publicerade den generella formeln för att lösa tredjegradsekvationer var italienaren Girolamo Cardano (1501-1576). Han var dock inte den förste att komma på lösningen utan var bara snabbast att publicera den. Algebran hade ännu inte fått ett universellt språk utan hans lösning publicerades med ord och vissa förkortningar som var signifikant för Cardano. Vi kallar idag den lösningsmetoden för Cardanos formel.

Den första som löste en tredjegradsekvation var matematikprofessorn Scipione del Ferro (1465-1526). För att undvika att rivaler tog del och inspirerades av hans lösningar höll del Ferro sitt arbete hemligt. del Ferro delade endast sitt arbete med två personer, Antonio Maria Fior (första halvan av 1500-talet) och svärsonen Anibale della Nave (1500?-1558). Fior ställde senare upp i en tävling mot Niccolò Fontana Tartaglia (1499?-1557) som gick ut på att lösa tredjegradsekvationer och förlorade. Tartaglias vinst i tävlingen gjorde läkaren Cardano, som var intresserad av att lösa tredjegradsekvationer, fast besluten om att få fatt på lösningsmetoden och tvingade Tartaglia att överlämna sina lösningar till honom. Tartaglia gjorde detta mot att Cardano lovade att hålla dem hemliga och inte publicera dem (Katz, 1998) och (Kline, 1972).

Cardano och hans lärjunge Lodovico Ferrari (1522-1565) besökte della Nave år 1542, 16 år efter del Ferros död. Under besöket upptäckte Cardano och Ferrari att del Ferros lösningsmetod var densamma som Tartaglias. Cardano förstod då att del Ferros kommit på metoden före Tartaglia. Cardano kunde därför publicera lösningsmetoden utan att bryta sitt löfte till Tartaglia. I sin publikation refererar han till att del Ferro kom på metoden först men att Cardano hade fått nys om lösningarna från Tartaglia (Katz, 1998) och (Kline, 1972).

Trots att Tartaglia nämns i publikationen blev han förargad på Cardano och tyckte att Cardano hade brutit sitt löfte. Tartaglia publicerade själv lösningsmetoden men den fick ingen bäring då den inte var utvecklad jämfört med Cardanos version (Katz, 1998) och (Kline, 1972).

3.4.1 Den matematiska lösningsmetoden

Ovan beskrivs bakgrunden till hur allmänheten fick ta del av lösningsmetoden och historien kring vem som utvecklade modellen. Nedan redovisas lösningen med ett modernt matematiskt skrivsätt, alltså inte Cardanos skrivsätt (Kline, 1972).

Vi vill lösa

$$x^3 + mx = n \tag{1}$$

där m och n är positiva tal. Cardano introducerar två storheter t och u som uppfyller

$$t - u = n \tag{2}$$

och

$$(tu) = \left(\frac{m}{3}\right)^3. \tag{3}$$

Han antar att lämpliga t och u finns,

$$x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u}\,. \tag{4}$$

Med hjälp av substitution av (2) och (3) och lösningsmetoden för andragrads-ekvationer får Cardano ekvationerna

$$t = \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3} + \frac{n}{2} \tag{5}$$

och

$$u = \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3} - \frac{n}{2}\,. \tag{6}$$

Där han enbart tar hänsyn till de positiva kvadratrötterna.

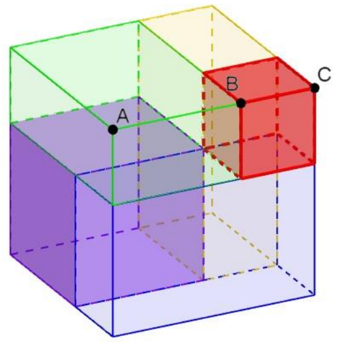
Cardanos bevis för att (4) är korrekt är av geometrisk karaktär. Cardano ser t och u som volymer av kuber vars sidor är $\sqrt[3]{t}$ respektive $\sqrt[3]{u}$. Produkten av sidorna är en rektangel vars area är $\frac{m}{3}$. Ur ekvation (2) menar Cardano att skillnaden mellan de båda volymerna ä n. Cardano hävdar även att lösningen x är skillnaden i kanterna på de två kuberna. Det vill säga $x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u}$. För att bevisa att detta värde på x stämmer ansätter Cardano en geometrisk hjälpsats och bevisar denna. Genom att dela en linje AC i två segment, se figur 1.

Figur 1

Segmentet BC skärs ut så att kuben med siad AB blir lika med kuben med sida AC minus kuben med sida BC minus 3 stycken rätblock vars sidor är AC, AB och BC. Hjälpsatsen kan skrivas matematiskt på följande vis:

$$(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u})^3 = t-u-3\left(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u}\right)\sqrt[3]{t}\,\sqrt[3]{u}. \tag{7}$$

Nu låter Caradno $x=\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u}$, $t-u=n$ och $\sqrt[3]{t}\,\sqrt[3]{u}=\frac{m}{3}$ och då säger hjälpsatsen att $x^3=n-mx$. Om han väljer t och u för att uppfylla villkoren (2) och (3), värdet för x givet av (4) i termer av t och u kommer villkoren för kuben att uppfyllas, för att visualisera Cardanos tankegång se figur 2. Cardano ger sedan en verbal aritmetisk regel för metoden att ta fram $\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u}$ där t och u ges av (5) och (6) i termer av m och n.



Figur 2

Cardano kunde lösa alla typer av tredjegradsekvationer som bestod av x^3, x och en konstant där dessa enbart var positiva tal. Dock löstes alla ekvationer med likartad metod som ovan men med skilda geometriska motiveringar för varje enskild ekvation.

Cardano visar även i sin bok hur man löser ekvationer som $x^3+6x^2=100$ och $x^6+6x^4=100$ genom variabelbyte. Han tog fram både positiva och negativa rötter men kallade de negativa påhittade. Han ignorerade komplexa rötter och kallade ekvationer som ledde fram till dessa rötter falska.

Det fanns en svårighet med Cardanos kubiska lösning, vilken var att reella tal kan uttryckas i termer av kubikrötter av komplexa tal, sådana uttryck fås fram i ekvation (4). Viète lyckades lösa dessa genom att undvika Cardanos formel och använde istället trigonometri, en metod som används än idag (Kline, 1972). Han utgick ifrån likheten

$$\cos 3A \equiv 4cos^3A-3cosA. \tag{8}$$

Genom att använda $z=cosA$ blev likheten istället

$$z^3-\frac{3}{4}z-\frac{1}{4}cos3A\equiv 0. \tag{9}$$

Antag tredjegradsekvationen

$$y^3+py+q=0. \tag{10}$$

Genom att introducera $y = nz$ där n är till vårt förfogande, kan vi göra koeficienterna från (10) till samma som de från (9). Genom att substituera $y = nz$ i (10) fås

$$z^3 + \frac{p}{n^2}z + \frac{q}{n^3} = 0. \tag{11}$$

Nu krävs ett n som gör att $\frac{p}{n^2} = -\frac{3}{4}$ så att

$$n = \sqrt{-4\frac{p}{3}}. \tag{12}$$

Givet det valda värdet på n, väljs ett värde på A så att

$$\frac{q}{n^3} = -\frac{1}{4}cos3A \tag{13}$$

eller så att

$$cos3A = -\frac{4q}{n^3} = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}. \tag{14}$$

Man kan visa att om de tre rötterna är reella är p negativt så att n är reellt. Vidare kan man visa att $|cos3A| < 1$. Om så önskas kan $3A$ fås ur tabellverk. Oavsett värdet på A så uppfyller $cosA$ (9) eftersom (9) är en likhet. I detta fall valdes A så att (11) stämmer in på (9). För detta värde på A uppfyller $cosA$ (11). Värdet på A bestäms av (14) och fixerar $3A$. Oavsett vilket valt A som uppfyller (14) gäller även att $A + 120°$ och $A + 240°$ uppfyller (14). Eftersom $z = cosA$ så är det tre värden som uppfyller (11):

$$cosA, \quad \cos(A + 120°) \text{ och } \cos(A + 240°)\,.$$

De tre värdena som uppfyller (10) är n gånger värdena av z, där n är given av (12). Viète fann endast en rot. Den första personen som hittade alla tre rötterna oavsett om de var reella eller komplexa var Leonhard Euler. Han sa att om ω och ω^2 är de komplexa rötterna till $x^3 - 1 = 0$, som även är rötterna till $x^2 + x + 1 = 0$, så är de tre kubikrötterna för t och u i (5) och (6)

$$\sqrt[3]{t}\,,\ \omega\sqrt[3]{t}\,,\ \omega^2\sqrt[3]{t} \text{ och } \sqrt[3]{u}\,,\ \omega\sqrt[3]{u}\,,\ \omega^2\sqrt[3]{u}\,.$$

Nu måste ett värde väljas så att produkten av $\sqrt[3]{t}$ och $\sqrt[3]{u}$ är det reella talet $\frac{m}{3}$. Eftersom ω och ω^2 ger produkten 1, $\omega \cdot \omega^2 = \omega^3 = 1$; därav blir de mest lämpliga valen av x, uttryckt av (4) är

$$x_1 = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u}\,, \quad x_2 = \omega\sqrt[3]{t} - \omega^2\sqrt[3]{u}\,, \quad x_3 = \omega^2\sqrt[3]{t} - \omega\sqrt[3]{u}\,.$$

De framgångsrika lösningarna av tredjegradsekvationer följdes snabbt upp av framgångsrika lösningar av fjärdegradsekvationer (Kline, 1972).

3.5 Algebra idag

Med tidens gång fortsatte algebran att utvecklas och blev under 1900-talet allt mer abstrakt. Med all abstrakt algebraisk kunskap och de förfinade metoderna kunde man nu även finna lösningar på mer konkreta problem. Den algebraiska strukturer betydde mycket för matematiken men kanske än mer för den teoretiska fysiken. Tack vare algebrans möjlighet att generalisera och därmed framställa formler, suddades gränserna mellan de olika matematiska grenarna ut. Under sent 1900-tal början av 2000-tal effektiviserades också algebran genom att datorprogram som kunde lösa algebraiska ekvationer utvecklades. Detta underlättade avsevärt då hypoteser skulle testas då man försökte tränga djupare in i algebraiska teorier (Roos, u.å.).

Algebran kan idag grovt delas upp i fyra olika grupper, *elementär algebra, abstrakt algebra, universell algebra* och *datoralgebra*. Nedan finns kortfattade förklaringar över dessa grupper (Algebra, 2016, 15 augusti).

- *Elementär algebra (skolalgebra)* innebär algebra där symboler används för att beteckna variabler och konstanter. Inom detta område behandlas de reella talens egenskaper och dess regler som gäller för matematiska uttryck och ekvationer innehållande symboler, i synnerhet polynom.

- *Abstrakt algebra* består av axiomatiskt studerande och definierande av algebraiska strukturer så som ringar, kroppar och grupper. Inom den abstrakta algebran ingår den linjära algebran där det studeras om vektorrummens specifika egenskaper.

- *Universell algebra* innefattar studier av de gemensamma egenskaperna för alla algebraiska strukturer.

- *Datoralgebra* byggs kortfattat upp utav insamlade algoritmer för symbolisk behandling av matematiska objekt.

4 Två synsätt på matematiklärande

> Undervisningen ska anpassas till varje elevs förutsättningar och behov. Den ska främja elevernas fortsatta lärande och kunskapsutveckling med utgångspunkt i elevernas bakgrund, tidigare erfarenheter, språk och kunskaper.
>
> Skolverket, 2011b

Citatet ovan är hämtat från läroplanen för grundskolan och finns under rubriken *En likvärdig utbildning*. Vi som blivande lärare har under hela vår utbildning blivit matade med målbilden om att grundskoleutbildningen skall vara likvärdig. Som citatet framhäver ska undervisningen anpassas till varje enskild elev och främja dennes fortsatta lärande och kunskapsutveckling. Detta ska baseras på elevens bakgrund, tidigare erfarenheter, språk och kunskaper.

Detta är som sagt målbilden men kan vara svårt i praktiken att genomföra eftersom man vanligtvis är en lärare på 30 elever. Tiden för varje elev blir betydligt mindre än om det hade varit en lärare till varje elev. Det kan i praktiken vara svårt att tillhandahålla en anpassad undervisning till varje enskild elev. För att varje elev ändå ska få de bästa förutsättningarna för sin kunskapsutveckling krävs det att man som lärare varierar sin undervisning.

Under vår egen skolgång såg vi endast katederundervisning på matematiklektionerna. Även om katederundervisning är dominerande ute på skolor i matematikundervisningen idag är det inte den enda som finns. Matematikerna Skott, Jess, Hansen, Lundin, & Retzlaff (2010) lyfter fram främst två perspektiv på matematiklärande *Lärande som tillägnande* och *Lärande som deltagande*. Vi kommer nedan att redogöra för vad dessa innebär.

4.1 Lärande som tillägnande

Lärande som tillägnande innebär att eleverna ska tillägna sig kunskaper och färdigheter. Den radikala konstruktivismen delar denna syn på lärande och har haft stor betydelse i matematikdidaktiken under de senaste årtiondena. Den radikala konstruktivismen fokuserar bilden om att elever ska lära sig matematiken med förståelse (Skott, Jess, Hansen, Lundin, & Retzlaff, 2010).

Skott et al. (2010) listar fem kännetecken på lärande som tillägnande för eleven som vi sammanfattar nedan:

1. Relationen mellan det eleven redan kan och det eleven ska lära sig,
2. utvidga och tillämpa matematisk kunskap,
3. reflekterar kring nya begrepp och metoder med sina matematiska erfarenheter,
4. gestaltar matematiken med olika uttrycksformer så som i tal, skrift och matematiska symboler, och
5. förstå det matematiska innehållet och göra det till sitt.

Den radikala konstruktivismen vilar på två grundläggande principer.

- Vetande tas inte emot passivt utan byggs upp aktivt av den enskilde individen.
- Kunskap är inte en fråga om att upptäcka en objektivt existerande värld, utan om att organisera sin erfarenheter.

(Skott, Jess, Hansen, Lundin, & Retzlaff, 2010, s. 61)

Dessa principer bygger i hög grad på biologen och utvecklingspsykologen Jean Piagets arbete om barns kunskap och utveckling (Skott, Jess, Hansen, Lundin, & Retzlaff, 2010).

4.1.1 Jean Piaget

Piaget hade två centrala begrepp, *assimilation* och *ackommodation*. Dessa förklarade Piaget med en metafor om en viss snäckas utveckling i olika miljöer. Han upptäckte att snäckan i dess naturliga lugna miljö fick en långsträckt form. När samma sorts snäcka fick utvecklas i en mer turbulent omgivning var den tvungen att anpassa sig och fick istället en mer kompakt form. I det första fallet assimilerar snäckan, det vill säga att snäckan utvecklas i en miljö som överensstämmer med dess inneboende genetiska förutsättningar. I det andra fallet ackommoderar snäckan, det vill säga snäckan utvecklas i en miljö som inte stämmer överens med dess genetiska förutsättningar och tvingas därför till förändring av utvecklingsmönstret. Piaget drog paralleller mellan denna biologiska adaption och den mänskliga kunskapsutvecklingen (Skott, Jess, Hansen, Lundin, & Retzlaff, 2010). Litteraturvetaren Anders Palm (2008) har i sin artikel kortfattat beskrivit begreppen utifrån den mänskliga kunskapsutvecklingen enligt följande:

> Begrepp som assimilation och ackommodation är centrala inom konstruktivismen och går i korthet ut på att varje nytt kunskapsstoff som en elev skall ta till sig måste sättas i relation till den kunskap eleven redan har. Passar kunskapen väl in i det begreppsmönster eleven besitter kan det nya stoffet assimileras, men passar inte det nya stoffet in i den befintliga kunskapsmassan måste eleven första ackommodera sin bild av begreppet eller sin tidigare kunskap för att få pusselbitarna att passa ihop. Lärarens roll är att skapa situationer där elevens tidigare kunskap hamnar i konflikt med nya erfarenheter, så att möjlighet till assimilation och ackommodation ges – så kallade kognitiva konflikter.
>
> (Palm, 2008, s. 39-40)

4.1.2 Ernst von Glasersfeld

Ett annat centralt begrepp som Piaget använde var *schema*. von Glasersfeld kopplade samman begreppen *schema* och *assimilation*. von Glasersfeld menar att situationer som upplevs efter ett schema alltid har ett inslag av assimilation. Tolkningen von Glasersfeld gjorde av Piagets schema var att det är den struktur som sammanfattar händelseförloppet i bekanta situationer där individen följde ett handlingsmönster. Alltså att I) individen kände igen en situation II) visste hur hen skulle agera i situationen och III) hade en förväntan om ett visst resultat från tidigare erfarenheter av liknande situationer (Skott, Jess, Hansen, Lundin, & Retzlaff, 2010).

Ett exempel är när en elev ser en uppgift som hen kan assimilera med tidigare erfarenheter och därmed har ett handlingsschema med ett väntat resultat. Om resultatet då inte stämmer överens med uppgiftens korrekta svar tvingas eleven att ompröva sitt handlingsschema och revidera sin förförståelse av de nya erfarenheterna. Med andra ord kan omprövningen av schemat leda till ackommodation. Detta gäller dock inte i alla fall, även om resultatet blir fel betyder det inte alltid att eleven ackommoderar. Istället kan eleven assimilera till tidigare erfarenheter och få intryck av att hens svar är kompatibelt med det korrekta svaret (Skott, Jess, Hansen, Lundin, & Retzlaff, 2010).

Den radikala konstruktivismen bygger till stor del på att vi konstruerar vår egen värld på våra egna erfarenheter. Man kan då tro att den radikala konstruktivismen vill ha ett klassrum eller undervisning utan interaktion, men så är inte fallet. Språket och kommunikationen spelar en viktig roll i undervisningen för att få sin förståelse av olika begrepp och metoder bekräftad eller motbevisad. Diskussion och reflektion är avgörande för att ackommodera och vidga sin förståelse (Skott, Jess, Hansen, Lundin, & Retzlaff, 2010).

Sammanfattningsvis kan den radikala konstruktivismen ses i kontrast mot lärande som tillägnande. Skott et al. (2010) har konstaterat att lärande endast kan ske hos den enskilde individen. Kunskap kan inte överföras från en individ till en annan. Anledningen till att den radikala konstruktivismen ändå beskriver lärande som tillägnande bäst är för att individen som konstruerar sin kunskap kan uppleva det som att hen får kunskapen tillägnad av en annan individ.

4.2 Lärande som deltagande

Lärande som deltagande bygger på interaktion med andra, till skillnad från lärande som tillägnande. Interaktionen är en del i de båda lärmodellerna men för lärande som deltagande är interaktionen grunden för att kunna ta till sig kunskap. På 1980-talet började man mer och mer ifrågasätta och se konstruktivismens brister, man kallar det för *The social turn*. Man såg allt fler fördelar med det sociala i matematiklärandet, detta ersatte det tidigare fokus som legat på konstruktivismens syn på matematiklärande. Vygotskij och den kulturhistoriska skolan var framförallt inspirationen till den sociala vändningen i matematikdidaktiken (Skott, Jess, Hansen, Lundin, & Retzlaff, 2010).

4.2.1 Vygotskij

Vygotskij intresserade sig för mänsklighetens sociala och kulturella utveckling. Han såg att det som skilde människan från andra varelser var de högre mentala funktionerna. Dessa funktioner omfattar bland annat varseblivning, tänkande uppmärksamhet och minne. Han såg att funktionerna hade stor koppling till det sociala, inte minst språket, och formade människans uppfattning om omvärlden. Vygotskijs hjärtefråga blev därför *hur individuellt medvetande och handlingar blir till i sociala möten* (Skott, Jess, Hansen, Lundin, & Retzlaff, 2010).

Vygotskij lyfte fram att en kombination mellan praktik och språk vid inlärningen gav bättre resultat än om inlärningen skulle ske var för sig. Ett citat av Vygotskij som Skott et al. (2010) lyfter fram är följande.

> The most significant moment on the course of intellectual development, which gives birth to the purely human forms of practical and abstract intelligence, occurs when speech and practical activity, two previously completely independent lines of development, converge.
>
> (Skott, Jess, Hansen, Lundin, & Retzlaff, 2010, s.90)

4.2.2 Begreppsbildning enligt Vygotskij

Vygotskij ansåg att begreppsbildning var viktigt och där spelade språket en central roll. Talet var viktigt på så vis att Vygotskij menade att det inte var ett uttryck för en redan utvecklad tanke utan istället ett sätt att strukturera tänkandet på. Vygotskij skiljer *vardagliga begrepp* från *vetenskapliga*. Förståelsen för de vardagliga begreppen utvecklas i sin användning i konkreta sammanhang och får därefter en formell definition och betydelse. De vetenskapliga begreppen lär man sig i omvänd ordning, alltså först lärs definitionen och den formella betydelsen därefter utvecklas betydelsen genom användning och i relation till vardagliga begrepp (Skott, Jess, Hansen, Lundin, & Retzlaff, 2010).

Skott et al. (2010) lyfter fram Vygotskijs idé om begreppsbildning i relation till räkning med algebra. För att elever ska kunna ta till sig de vetenskapliga begreppen inom algebra är det av värde att elevernas förståelse av tal och räkning är väl utvecklad. Detta på grund av att den abstrakta matematiken, vilket algebra är, ska vara meningsfull för eleverna.

Relationen mellan de vardagliga och vetenskapliga begreppen är alltså väldigt viktig. För att en elev ska kunna ta till sig de vetenskapliga begreppens innehåll krävs att hen är på en viss utvecklingsnivå när de gäller de vardagliga begreppen. Om eleven inte har tillräcklig förståelse för olika former av talbehandling finns det ingen mening i att undervisa elever i algebra. Vygotskij poängterar att de vetenskapliga begreppen inte kan läras in som glosor i språkundervisning. För att eleven ska få en förståelse för de vetenskapliga begreppen måste läraren använda begreppen i kända sammanhang och vid diskussioner som förs i klassrummet (Skott, Jess, Hansen, Lundin, & Retzlaff, 2010).

Matematikdidaktikern Anna Sfard såg även hon betydelsen av kommunikation för förståelsen. För att elever ska kunna ta till sig olika sätt att använda ord och symboler på krävs att läraren frekvent använder dem. De matematiska begreppen är väldigt abstrakta eftersom de inte motsvarar fysiska objekt. För att ett abstrakt begrepp ska kunna kännas som något konkret behövs/krävs det att förståelsen utvecklas i takt med att man använder det språkliga och symboliska representationerna av begreppet (Skott, Jess, Hansen, Lundin, & Retzlaff, 2010).

4.2.3 Den proximala utvecklingszonen

Ett utav de mest kända begreppen från Vygotskijs teori är *den proximala utvecklingszonen*. Detta betyder att lärandet skapar ett utvecklingsrum. Utvecklingsrummet uppstår genom att en elev tillsammans med exempelvis en lärare arbetar med aktiviteter som för eleven närmare sitt mål. Genom att samarbeta med läraren utvecklar eleven sin förståelse och kommer efter ett tag att klara av den gemensamma aktiviteten på egen hand. För att en elev ska kunna ta sig vidare till nästa utvecklingsrum krävs varierad undervisning och social interaktion. För att eleven ska få bästa möjliga förståelse för matematiken ska eleven ges möjlighet att på lektionerna få relatera den vardagliga matematiken med den mer abstrakta matematiken (Skott, Jess, Hansen, Lundin, & Retzlaff, 2010).

4.2.4 Situerat lärande

Didaktikerna Jean Lave och Etienne Wenger menar att kunskap är starkt förknippat till deltagande i verkliga sammanhang där kunskapen används. Exempelvis procenträkning lärs bäst genom att handla på butiksrea istället för i klassrummet. Vidare menar Lave och Wenger inte att man nödvändigtvis måste undervisa matematiken i dess konkreta sammanhang utan använda sammanhangen för att analysera uppgifter i skolan (Skott, Jess, Hansen, Lundin, & Retzlaff, 2010).

5 Räkna med algebra

I detta kapitel behandlas de vanligaste svårigheterna som elever har med algebra. Kapitlet tar även upp hur algebra kan undervisas med hjälp av problemlösningsuppgifter som är baserade på vardagsnära situationer. Vidare behandlar kapitlet skillnaden mellan aritmetisk och algebraisk problemlösning.

5.1 Elevers svårigheter med algebra

I Per-Eskil Perssons doktorsavhandling (2010) belyser han olika svårigheter som hans forskning visar att elever har vid algebra inlärning. Dessa är framförallt algebraiska begrepp och bristande kunskaper i aritmetiken. Även didaktikerna Cecilia Kilhamn (2013), Margrethe Naalsund (2012), Olteanu (2000; 2001) och litteraturvetaren Palm (2008) belyser dessa svårigheter i sina texter.

För att eleverna skulle ta till sig de algebraiska begreppen testade Olteanu (2000) att låta eleverna skriva en algebraisk begreppslista. Dessa var Olteanu noga med att använda under lektionstillfällena för att befästa begreppen hos eleverna. Olteanus studie visade sig vara positiv då eleverna lärde sig begreppen bättre än vad de gjort tidigare. De andra författarna, som nämns i ovanstående stycke, skrev inget konkret om hur begrepp kan befästas hos eleverna, men de belyser alla vikten av att som lärare vara konsekvent och tydlig i användandet av algebraiska begrepp.

Palm (2008) ger förslag i sin artikel om hur man kan låta elever undersöka likheter och skillnader i redan färdiga lösningsförslag på uppgifter med algebraiska uttryck. Dessa lösningsförslag kunde vara både korrekta och felaktiga. Han menar att det är lättare att diskutera andras fel än sina egna. Ambitionen med dessa uppgifter är att låta elever reflektera och fördjupa sin förståelse för aritmetiken. Även Olteanu (2000) framhäver betydelsen av att tänka på hur man tänker när man löser algebraiska problem. Olteanu menar att algebrauppgifter ofta löses mekaniskt utan någon reflektion. Hon belyser därför vikten av att få diskutera och resonera med klasskamrater om sina lösningar.

Eftersom begreppen visar sig vara en svårighet trycker många matematikdidaktiker på att språket är viktigt. Det är viktigt att eleverna får uttrycka algebran muntligt och skriftligt. Kalman (2008) skriver om betydelsen av att låta mellanstadieeleverna gemensamt med läraren översätta algebraiska uttryck till verbala problem för att sedan kunna lösa problemen muntligt. Kalman menar att detta gör eleverna medvetna om den algebraiska lösningsmetoden vilket de kommer ha nytta utav då algebra presenteras på högstadiet och senare. Dessa tankar stämmer väl överens med Olteanus (2001) syn på algebraiskt lärande. Olteanu menar att eleverna först måste öva på att formulera sina tankar i ord för att sedan kunna skriva ner dem som symboler i ett algebraiskt uttryck.

Naalsund (2012) skriver i sin avhandling vad som behövs för att elever ska kunna utveckla en algebraisk kunskap, nämligen begreppsförståelse, procedurkunskap, representationskompetens och strategikompetens. Hon menar att algebrans symbolspråk ligger som grund för att kunna uttrycka många andra matematiska samband. Algebran blir en hörnsten för det fortsatta lärandet inom matematik.

Persson (2010) framhäver vikten av elevernas motivation när det kommer till algebrainlärning. Hans forskning visar att inlärning av algebra med hjälp att digitala verktyg så som miniräknare gjorde eleverna mer motiverade. Detta på grund av att eleverna slapp fokusera på den aritmetiska uträkningen och kunde enbart fokusera på att förstå algebran. I läroplanen för grundskolan står det:

> Undervisningen i ämnet matematik ska syfta till att eleverna utvecklar kunskaper om matematik och matematikens användning i vardagen och inom olika ämnesområden.
>
> Skolverket, 2011a

> Eleverna ska även ges förutsättningar att utveckla kunskaper för att kunna tolka vardagliga och matematiska situationer samt beskriva och formulera dessa med hjälp av matematikens uttrycksformer.
>
> Skolverket, 2011a

> Eleverna ska genom undervisningen också ges möjlighet att utveckla en förtrogenhet med matematikens uttrycksformer och hur dessa kan användas för att kommunicera om matematik i vardagliga och matematiska sammanhang.
>
> Skolverket, 2011a

Att koppla till vardagssituationer kan tänkas göra eleverna motiverade, detta är dock motsatsen till Olteanus (2001) observationer. Olteanus studie visade att eleverna inte såg kopplingen mellan algebra och vardagssituationer vilket gjorde dem omotiverade till att lösa algebraiska problemlösningsuppgifter.

5.2 Algebra i skolan

Vad som har betraktats tillhöra området algebra i skolan har under de senaste årtiondena förändrats. Under 1990-talet behandlade skolalgebra främst procedurer för att genomföra och lösa algebrauppgifter. Men under den tiden skrevs rapporter där det ansågs att algebra var mer än procedurer. Det fanns en önskan om att algebra skulle innehålla generalisering, modellering, problemlösning och funktionsperspektiv. Detta anammades av Skolverket och infördes i läroplanen (Kilhamn, 2013).

Idag anses skolalgebra vara en gren inom matematiken som behandlar symbolisering av generella numeriska relationer och matematiska strukturer. Det är både ett sätt att se och resonera kring problem men även ett sätt att formulera problemen (Kilhamn, 2013).

5.2.1 Algebra i vardagssituationer

Kilhamn (2013) har undersökt och analyserat hur två lärare, B och C, introducerar algebra för sina elever i årskurs 6. Båda lärarna använder sig av samma läroplan och samma lärobok. Kilhamn ser i sin studie att lärarna har två olika sätt att närma sig algebra på. Lärare B närmar sig algebran som om det vore ett främmande språk av symboler som eleverna behöver lära sig genom aktiviteter. Lärare C å andra sidan närmar sig algebran som om det vore ett problemlösningsverktyg som är användbart vid modellering, generalisering och för att skriva uttryck. Kilhamn menar på att lärare B pratar om algebra och lärare C använder algebra i undervisningsmomentet. I Kilhamns studie belyser hon vikten av att elever har med sig begreppsförståelse och aritmetiska kunskaper för att kunna tillägna sig algebra.

Algebra som problemlösningsverktyg, lärare C

Att undervisa om algebra som problemlösningsverktyg innebär att elever, som tidigare inte introducerats för algebra, ges ett algebraproblem. Detta problem löser därefter eleverna tillsammans genom resonemang. Läraren finns som stöd när eleverna arbetar med uppgiften. Målet är att algebra ska komma in naturligt och underlätta problemlösningen. För att uppnå detta krävs dock lämpliga uppgifter som varken är för svåra eller för lätta (Kilhamn, 2013).

Om denna metod ska användas behöver eleverna förstå vad variabeln betyder och vad den representerar. Läraren måste i slutet av en sådan här lektion vara noga med att försäkra sig om att eleverna inte har missuppfattat variabelbegreppet (Kilhamn, 2013). Dock kan detta vara problematiskt eftersom variabelbegreppet och oberoende och beroende variabel är diffusa och har ingen konkret definition. NE (u.å.) tolkar variabelbegreppet enligt följande *”variabel i matematiken storhet som tänks variera”* och *”Derivatan av en funktion beskriver hur den beroende variablen ändras då den oberoende variabeln (som kan vara tiden eller en lägeskoordinat) varierar.”* (NE, u.å.). Christer Kiselman och Lars Mouwitz (2008, s.21) definierar variabelbegreppet enligt följande *”Storhet som kan anta värden i en given mängd”* och ger kommentaren

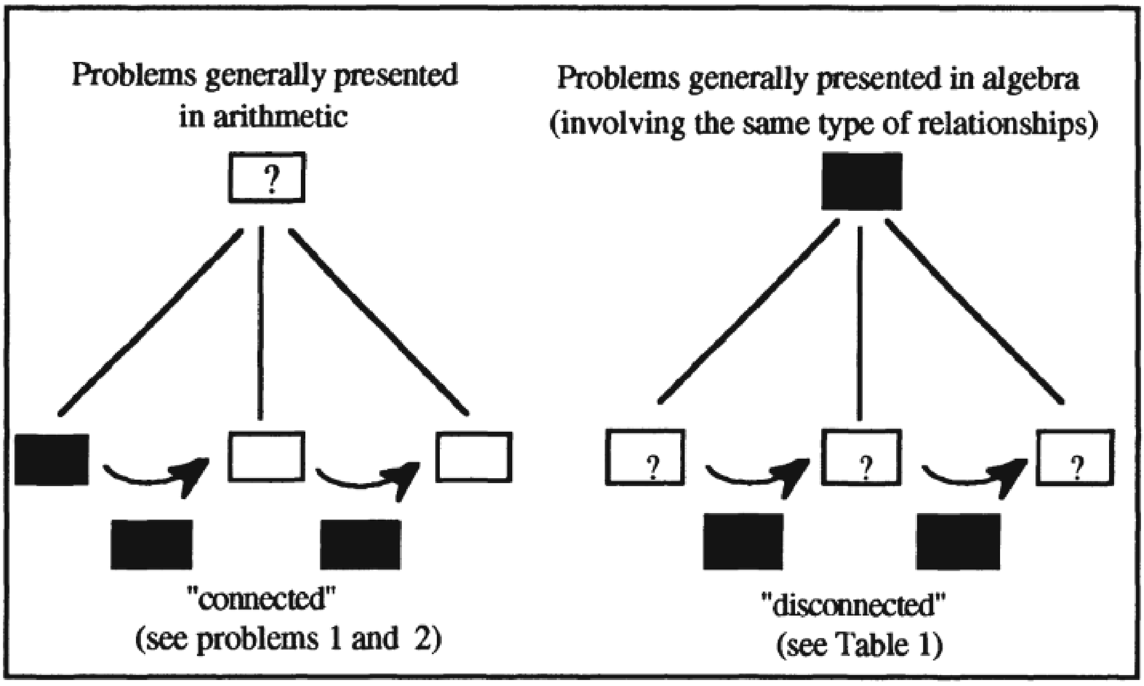
> Variabler betecknas ofta med någon av bokstäverna x, y eller z. Inom statistiken skiljer man på ***numeriska variabler*** (som antar tal som värden) och ***kategoriska variabler*** (icke-numeriska variabler).
>
> Kiselman & Mowitz, (2008), s. 21

Algebra som främmande språk, lärare B

Att undervisa om algebra som ett främmande språk innebär att elever får i uppgift att finna uttryck som beskriver relationer. Uttrycken består av beroende och oberoende variabler. En djupdykning in i språkets grammatik och uppbyggnad sker. Uttrycket blir för eleverna en modell av relationen mellan två obekanta. Som lärare är det, enligt Kilhamn (2013), av stort värde att vara oerhört tydlig med vad som är oberoende och beroende variabel samt vad ekvation och uttryck innebär för att elever ska få en korrekt förståelse från början (Kilhamn, 2013).

5.2.2 Att introducera algebra med hjälp av problemlösningsuppgifter

Matematikerna Nadine Bednarz och Bernadette Janvier (1996) studerade hur algebra kunde användas som problemlösningsverktyg. De undersökte även skillnader mellan hur aritmetiska och algebraiska problemlösningsuppgifter ser ut samt hur elever löser dessa två sorters uppgifter. Den generella skillnaden som de såg var att de aritmetiska problemen hade sammankopplingar mellan de kända och de okända värdena vilket var tvärtemot hur de algebraiska problemen var uppbyggda. I de algebraiska problemen fanns det däremot inte någon tydlig sammankoppling mellan de okända och kända värdena. Bednarz och Janvier illustrerar skillnaden i figur 3.



Figur 3

Bednarz & Janvier (1996) gjorde en studie på 12-13 åringar som tidigare inte arbetat med algebra. Dessa elever fick lösa ett antal algebraiska problem aritmetiskt. Problemen var av samma karaktär som nedanstående exempel.

> Three children are playing marbles. Together they have 198 marbles. Pierre has 6 times as many marbles as Denis and 3 times as many as Georges. How many marbles does each child have?
>
> Bednarz & Janvier (1996), s. 120

I slutet av studien blev eleverna även intervjuade och fick då lösa algebraiska problem. Bednarz och Javier ställde frågor som förhoppningsvis skulle få eleverna att börja tänka algebraiskt.

Fyra tillvägagångssätt vid problemlösning

Då eleverna i Bednarz & Janviers studie fick lösa de algebraiska problemen aritmetiskt var det framförallt fyra tillvägagångssätt som utkristalliserade sig.

1. Använder sig av det kända värdet som startpunkt för att kunna hitta sammankopplingen mellan de kända och okända värdena.

Genom att lösa aritmetiska problemlösningsuppgifter har eleverna lärt sig att bestämma ett startvärde. Detta ger eleverna möjligheten att ta fram och räkna ut, på varandra följande, relationer som ges i problemet. Eleverna kan då stegvis räkna ut de okända värdena. Vissa elever kommer därför välja denna strategi även vid algebraiska problem även om det kända värdet inte har en direkt sammankoppling med de okända värdena och kan inte lösas ut genom att beräkna relationerna mellan dem steg för steg.

2. Skapar en startpunkt genom att använda ett gissat värde för att sedan pröva sig fram till de okändas värde.

Eleverna inser att det kända värdet som ges i ett problem inte är direkt sammankopplat med de obekanta värdena. Eleverna väljer istället ett fiktivt värde som startvärde. Därefter kan eleven steg för steg beräkna de obekanta genom relationerna mellan dem och på så vis, förhoppningsvis, komma fram till det kända värdet som angavs i problemet. Om värdena inte överensstämmer får eleven välja ett nytt startvärde tills hen hittar rätt startvärde som tar fram de korrekta värdena på de obekanta.

3. Delar det kända värdet på antalet obekanta värden för att sedan kunna finna sammankopplingen mellan de olika okända.

Vissa elever kommer att assimilera problemet med ofta använd numerisk strategi. Det vill säga att om problemet innehåller tre obekanta med relationer mellan dem och ett känt värde vilket är summan mellan de obekanta, kommer vissa elever att dividera det hela med antalet delar. På så vis uppfattar eleven att hen har fått fram en obekant och kan med hjälp av relationen mellan de olika obekanta beräkna de resterande två värdena.

4. Tar strukturen i beaktning och omformulerar problemet för att kunna hitta sammankopplingen.

Denna lösningsmetod görs av elever som behärskar de inblandade relationerna på en mycket hög nivå. Dessa elever klarar av att gå bakvägen och har inga större problem med att lösa algebraiska uppgifter korrekt med hjälp av en aritmetisk lösningsmetod. (Bednarz & Janvier, 1996)

Övergång från aritmetiskt till algebraiskt tänkande

Under intervjun i Bednarz och Janviers (1996) studie gavs eleverna ett något mer komplext algebraiskt problem. Syftet med detta var att inte med enkelhet skulle kunna lösa problemet aritmetiskt. Problemet var satt i ett sammanhang där en pojke skulle inventera tre olika varor i en sportaffär. Pojken vet att racketarna, bollarna och hockeyklubborna tillsammans ska vara 288 stycken. Han vet även att racketarna är 4 gånger så många som bollarna och hockeyklubborna är 7 gånger så många som racketarna. Eleverna fick därefter frågan om pojken skulle klara av att räkna ut hur många det fanns av varje sort utan att gå till affären eller om han måste gå tillbaka till affären och räkna antalet på en eller flera varor för att kunna veta hur många det fanns av varje sort.

Vissa elever var av åsikten att pojken inte kunde beräkna de olika antalen utan att gå till affären. De menade dock att de räcker om pojken räknar antalet på ett utav de tre föremålen för att därefter kunna använda det nu kända antalet för att kunna få fram de resterande antalen. De elever som tänker på detta vis, genom att finna en bekant kan resterande obekanta räknas fram, kommer enligt Bednarz och Janvier (1996) vara mer mottagliga för att ta till sig den algebraiska strukturen för hur ett sådant här problem beräknas. Elever som däremot behärskar aritmetiken så pass bra att de inte har några svårigheter att lösa mer komplexa algebraiska problem med aritmetik menar Bednarz och Janvier (1996) kan ha svårare att ta till sig den algebraiska lösningsmetoden. Detta på grund av att Bednarz och Janvier såg i sin studie att dessa elever inte såg fördelarna med en ny lösningsmetod. Dessa elever kan därför också vara svåra att övertyga om att byta till den algebraiska lösningsmetoden då de redan har den aritmetiska metoden som för dem fungerar utmärkt.

Bednarz och Janvier (1996) upptäckte även i sin studie att eleverna hade svårare att aritmetiskt lösa algebraiska problem som innehöll flera olika relationer där både multiplikation och addition fanns mellan dem. För att kunna övertyga alla elever om att den algebraiska lösningsmetoden är bra menar därför Bednarz och Janvier att man bör använda komplexa vardagsproblem som kräver två eller flera räknesätt. Detta upplevde Bednarz och Janvier fick eleverna motiverade och positiva till att lära sig räkna med algebra.

5.2.3 Undervisa om algebra före aritmetik

I Ji-Eun Lees (2006) artikel beskrivs Davydovs filosofi och läroplan om hur matematiken ska läras ut från algebra till aritmetik. Filosofin fokuserar på att undervisa algebraiskt tänkande redan i tidig skolålder. Artikeln tar upp att ryska studier har visat att lågstadieelever har signifikant större potential att ta till sig kunskap än som tidigare hade trotts. Studien försäkrade att Davydovs läroplan i matematik visade att instruktioner kan kontrollera utvecklingen av tänkande. Studien visade även att barn i själv verket kan lära sig att tänka abstrakt utan att först bli försedda med konkreta exempel. Lee (2006) skriver dessutom att en amerikansk studie rapporterade att ryska elever som följt Davydovs läroplan visade sig ha starkt integrerade kunskapsstrukturer organiserade runt abstrakta och generaliserbara begrepp och algebra. Lee belyser att detta kan vara en alternativ modell till att undervisa om matematik men poängterar även att matematiken har med kultur att göra. Detta innebär att det inte finns några garantier att Davydovs läroplan fungerar lika bra i andra kulturer som den gjorde i den ryska kulturen. För att undersöka detta valde Lee att genomföra en studie med Davydovs läroplan i en annan kultur, närmare bestämt i en amerikansk skola.

I studien, som pågick i tre dagar, deltog sju elever i åldrarna sju till åtta år. Lektionerna där studien ägde rum präglades av diskussioner som byggde på tidigare diskussioner. Under den första lektionen i studien fick eleverna problemet *Peter har a godisar. Lena har två godisar mer än Peter. Hur många godisar har Lena?* Till problemet fick de även en tallinje där a var utplacerad. Hela första lektionen gick till att diskutera olika lösningsstrategier för problemet. Inför lektion två hade läraren sammanställt ett antal felaktiga lösningsförslag som skulle diskuteras under lektion två. Efter lektion två hade ännu inte någon elev löst problemet. Den tredje och sista lektionen inleddes med två liknande problem där skillnaden var att den obekanta inte längre var en bokstav utan en koreanska siffersymbol. Detta visade sig vara lättare för eleverna att lösa och eleverna klarade att ställa upp det algebraiska uttrycket. Eleverna ombads därefter att placera ut dessa uttryck på en tallinje. Detta gav eleverna insikten om att symbolens placering är irrelevant så länge relationen stämmer. Eleverna fick sedan jämföra dessa tallinjer med problemet och tallinjen de tilldelats under den första lektionen. Efter en kort jämförelse och diskussion insåg eleverna likheten mellan symbolerna och bokstäverna samt att dessa problem endast med hjälp av relationer kan uttryckas men inte lösas med ett numeriskt värde. Trots att eleverna till sist kom fram till att svaret var ett uttryck och inte ett numeriskt värde såg Lee att eleverna inte var helt nöjda ett icke numeriskt värde som svar. Lee lade inte särskilt stor vikt vid detta missnöje då han vet att föreställningarna om att matematik ska ha ett numeriskt svar är starkt (Lee, 2006).

6 Diskussion

Innan vi fördjupade oss i algebrans historia valde vi att låta tre elever besvara frågan *vad algebra är*. För att sammanfatta deras svar hade de uppfattningen om att algebra är matematik med bokstäver och att lösa problem och ekvationer med hjälp av dessa. Anledningen till varför vi frågade eleverna var att få en inblick i hur elever ser på algebra och jämföra det med vår litteraturstudie där algebrans historia är en del. Det vi fann utifrån vår litteraturstudie var att algebran länge handlade om ord och inte symboler. Till en början var algebran främst retorisk och det skulle dröja fram till renässansen innan den symboliska algebran tog sin början. Det betyder att algebra inte huvudsakligen är symboler vilket eleverna antydde.

Algebra var redan för babylonierna ett sätt att skapa en modell av och förenkla verkligheten. När väl symbolernas utveckling skedde under renässansen var detta för att förenkla och effektivisera ytterligare men även för att generalisera matematiska och fysikaliska formler. I likhet med elevernas svar tror vi att många förknippar algebra med symbolräkning, vilket betyder att symbolerna är av stor vikt i dagens algebra och de som var mest framstående för denna utveckling var framförallt Viète men även efterföljande matematiker bland annat Descartes och Leibniz.

Inför vår litteraturstudie var vi båda bekanta med att elever har svårigheter med algebra. Detta gjorde oss nyfikna på att finna forskning som visar vilka de karakteristiska svårigheterna med algebra är. Vår studie visade att forskare som Persson, Kilhamn, Naalsund, Olteanu och Palm var alla överens om att svårigheterna framförallt är den algebraiska begreppsförståelsen och de bristande kunskaperna inom aritmetik. Detta stämmer överens mer våra erfarenheter från våra VFU-perioder.

Olteanu testade i sitt klassrum att låta elever använda sig av en begreppslista bestående av algebraiska begrepp som hon frekvent använde sig av under lektionerna. Detta stämmer överens med Vygotskijs syn på begreppsbildning där han menade att begreppen inte bara kan läras in som glosor. För att eleverna ska kunna ta till sig och förstå begreppen krävs att begreppen återkommer frekvent i kända sammanhang och diskussioner i klassrummet. Vygotskij påpekar dock att för att eleverna ska kunna ta till sig begreppen krävs att deras förståelse av tal och räkning är tillräckligt väl utvecklad för att kunna ta till sig den abstrakta algebran.

Utifrån Vygotskijs syn på begreppsinlärning, där begreppen inte får någon mening innan eleven har uppnått rätt matematisk nivå, tänker vi därför att Olteanus begreppslista inte har någon mening innan eleverna har blivit bättre på aritmetiken. Även om man som lärare har synsättet *lärande som tillägnande* funderar vi på om det är bättre att behandla aritmetiken före begreppsförståelsen. Detta för att vi tror att eleverna kan ha svårt att assimilera eller ackommodera de nya algebraiska begreppen till tidigare erfarenheter om dessa inte är tillräckliga.

Vi har alltså kommit fram till i vår studie att det som framförallt elever har svårt för med algebra är bristande kunskaper i aritmetiken och begreppsförståelsen. Vi tolkar att både synsättet lärande som tillägnande och lärande som deltagande lyfter fram vikten av att ha goda förkunskaper i tal och beräkning innan de abstrakta begreppen kopplade till algebra introduceras.

I vår studie ville vi även titta närmare på skillnader mellan aritmetisk och algebraisk problemlösning eftersom vi har upplevt att vardagsnära problem som löses aritmetiskt är lättare för eleverna än de problem som ska lösas algebraiskt. Bednarz och Janviers studie visade att skillnaden är problemets struktur. Vid ett aritmetiskt problem kan man utgå från det kända värdet för att sedan i tur och ordning beräkna och finna de okända värdena som sökes. Till skillnad från de algebraiska problemen där det okända värdet inte går att finna direkt med hjälp av på varandra följande beräkningar av det kända värdet.

Vi har tidigare diskuterat vikten av goda kunskaper i aritmetik för algebrainlärning, Bednarz och Janviers studie visar dock på att för goda kunskaper i aritmetiken kan vara en nackdel vid de problem som eleven förväntades lösa algebraiskt. De elever som hanterade aritmetiken med god säkerhet såg ingen anledning till att ta till sig det algebraiska räknesättet eftersom de redan hade en fungerande metod för att lösa problemet.

Vi tolkar att det är viktigt att ha kunskaper inom aritmetik men för att få elever med god säkerhet för aritmetiken motiverade att lära sig den algebraiska lösningsmetoden krävs mer komplexa algebraiska problem med flera relationer där addition, subtraktion, multiplikation och division finns mellan dessa. Blir problemet dock allt för komplext och långt ifrån verkligheten kan eleven istället tappa intresset och motivationen för att lösa problemet överhuvudtaget. Även om vi tror att det kan vara svårt med de lite mer komplexa problemen så tänker vi att situerat lärande är nyckeln till att fånga elevernas intresse. Det situerade lärandet tror vi med fördel kan kopplas till algebrans historia, där man exempelvis visar på hur den babyloniske köpmannen behövde algebra för att optimera sitt företagande. Vi tror att genom att ge eleverna en återblick i algebrans historia kan de lättare se vikten av algebrans användningsområden då och nu.

I vår litteraturstudie läste vi även om andra tillvägagångssätt vid algebrainlärning. I Lees artikel återges hennes studie kring om det kan vara bättre att undervisa om algebra före aritmetik. På så vis skulle man som lärare kunna undvika att eleverna blir för fästa vid de aritmetiska lösningsmetoderna. Lees studie utfördes dock på sju- till åttaåriga elever vilket gör att det kan vara svårt för oss högstadielärare att tillämpa hennes metod då eleverna vi kommer undervisa redan har befintliga kunskaper inom både aritmetik och algebra.

Sammanfattningsvis ser vi att framförallt begreppsförståelsen och förkunskaperna i aritmetik är viktiga nycklar för algebrainlärning. Vår studie har visat att den aritmetiska kunskapen bör befästas innan den algebraiska förståelsen kan ske hos eleven. De aritmetiska kunskaperna visade sig dock även kunna vara ett hinder om de var för goda eftersom eleven då ansåg den algebraiska lösningsmetoden som irrelevant att lära och använda sig av. Vi har även sett positivt resultat av att lära sig algebra före aritmetik men vi ser inte denna metod som lika tillförlitlig då den enbart är väl beprövad i den ryska kulturen och endast testad på sju elever i den amerikanska kulturen. Övervägande del av de studier som vi tagit del av belyser vikten av goda kunskaper inom aritmetik för bästa möjliga lärande i algebra vilket gör att vi anser denna metod mer tillförlitlig.

6.1 Fortsatt forskning

Syftet med vår litteraturstudie var bland annat att finna de kritiska aspekterna vid algebraundervisning. Vi har funnit kritiska aspekter dock saknar vi litteratur med strategier för undervisning då dessa tas i beaktning. Vår litteraturstudie om algebra har därför gjort oss fortsatt nyfikna på detta. Vi ser att det finns ytterligare forskningspotential kring undervisning med beaktning av elevers svårigheter med algebra. Områden som vi tänker skulle kunna forskas vidare på är skillnader mellan hur elever löser vardagsnära problemlösningsuppgifter av aritmetisk eller algebraisk karaktär. Inom samma område skulle man även kunna forska på hur dessa uppgifter är utformade för att väcka intresse och motivation hos eleven och koppla uppgifterna till situerat lärande. Ett annat område som är möjligt att forska vidare på är elevernas förkunskaper inom aritmetik som kan leda vidare till undersökning av hur elever lär sig och tar till sig algebra. Ytterligare ett undersökningsområde skulle kunna vara en djupare forskning på elevers svårigheter vid arbete med algebra.

Referenslista

Algebra. (2016, 15 augusti). I *Wikipedia*. Hämtad 2017-03-01, https://sv.wikipedia.org/wiki/Algebra

Bednarz, N., & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (red.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (s. 115-136). Dordrecht: Kluwer.

Kalman, R. (2008, februari). Teaching Algebra without Algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School,* (6), 334-339.

Katz, V. (1998). *A history of mathematics: An introduction* (2nd ed.). Boston: Addison-Wesley.

Kilhamn, C. (2013). Hidden differences in teachers' approach to algebra - a comparative case study of two lessons. *Cerme8, Antalya Turky, 2013,* CERME8, Antalya Turky, 2013.

Kiselhamn, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. Göteborg: Livréna AB.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford U. P..

Lee, J.-E. (2006, februari). Teaching algebraic expressions to young students: The three-day journey of "a + 2". *School Science and Mathematics,* 106(2), 98-104.

Miller, J. (2016, 4 april) Earliest Uses of Symbols of Operation [Hemsida]. Hämtad från http://jeff560.tripod.com/operation.html

Naalsund, M., & Oslos Universitetet. Samhällsvetenskapliga fakulteten. (2012). *Why is algebra so difficult?: A study of Norwegian lower secondary students' algebraic proficiency*. (Doctoral thesis/ Oslo University of Educational Sciences). Oslo: Oslos universitet.

Nationalencyklopedin [NE]. (u.å.). *Variabel*. Tillgänglig: http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/variabel

Olteanu, C. (2000). *Varför är skolalgebran svår?* Rapport, Högskolan Kristianstad. Tillgänglig: http://hkr.diva-portal.org/smash/get/diva2:214221/FULLTEXT01.pdf

Olteanu, C. (2001). *Vilka är elevernas svårigheter i algebra? En undersökning av hur gymnasieelever under sitt andra år utvecklar sin algebraiska förståelse*. Rapport, Högskolan Kristianstad. Tillgänglig: http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:214231/FULLTEXT01.pdf

Palm, A. (2008). Missuppfattningar i algebra: Problem för läraren eller eleven? *NÄMNAREN. TIDSSKRIFT FÖR MATEMATIKUNDERVISNING,* (3), 38-42

Persson, P. (2010). *Räkna med bokstäver: En longitudinell studie av vägar till en förbättrad algebraundervisning på gymnasienivå* (Doctoral thesis/ Luleå University of Technology). Luleå: Luleå tekniska universitet. Tillgänglig: https://dspace.mah.se/bitstream/handle/2043/10665/R%C3%A4kna%20med%20bokst%C3%A4ver%20publikation.pdf?sequence=1

Roos, J-E. (u.å.). Algebra. I *Nationalencyklopedin*. Tillgänglig: https://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/algebra

Skolverket. (2011a). *Kursplan – Matematik*. Hämtad från http://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/grundskoleutbildning/grundskola/matematik

Skolverket. (2011b). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Hämtad från http://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/grundskoleutbildning/grundskola/laroplan

Skolverket. (2016). *TIMSS 2015 - Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Stockholm: Elanders Sverige AB.

Skott, J., Jess, K., Hansen, H., Lundin, S., & Retzlaff, J. (2010). *Matematik för lärare. Delta, Didaktik*. Malmö: Gleerups Utbildning.

Thompson, J. (1996). *Matematiken i historien*. Lund: Studentlitteratur.

Thompson, J., Martinsson, T., Martinsson, P., & Thompson, J. (1994). *Wahlström & Widstrands matematiklexikon* (Ny utg. Ed.). Stockholm: Wahlström & Widstrand.