

TENTAMEN: L9MA30 Matematik för lärare, åk 7-9, Linjär algebra / LGMA30 Matematik för gymnasielärare, Linjär Algebra

Torsdag 31/10-2013, 8:30-12:30.

Telefonvakt: Martin Adiels 031-7725312 / 0736-221833

OBS, inga hjälpmedel!

DEL A

- 1) Låt $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ vara två vektorer i rummet givna på koordinatform.
- (4p) Definiera $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ på både koordinatform och på vektorform.
 - (2p) Definiera $\|\mathbf{u}\|$, dvs längden av en vektor i koordinatform.
 - (3p) Definiera $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, dvs kryssprodukten på koordinatform.
- 2) (5p) Låt $\mathbf{P}=(2,-1,2)$ vara en punkt i rummet och låt $L: \begin{cases} x = 1 + 1t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ vara en linje. Bestäm kortaste avståndet mellan $\mathbf{P}$ och L .
- 3) (4p) Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & b & 4 \end{pmatrix}$ vara en matris. För vilka värden på a och b saknar A invers?
- 4) Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- (3p) Beräkna AB och BA (om de existerar)
 - (3p) Beräkna $A\mathbf{b}$ och $\mathbf{b}^T A$ (om de existerar)
 - (3p) Beräkna $A + \mathbf{b}$ och $A + B$ (om de existerar)
 - (3p) Beräkna $\det(A)$ och $\det(B)$ (om de existerar)
 - (1p) Vilka av A^{-1} och B^{-1} existerar?
 - (3p) Beräkna de inverser som existerar.
 - (5p) Beräkna $B^T B$ och $(B^T B)^{-1}$ (om de existerar)

OBS två sidor!!

DEL B

5) Låt L_1 , L_2 och L_3 vara tre linjer i planet

- (3p) Låt ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ges av de tre linjerna. Motivera, utifrån linjerna, när systemet har 0, 1 eller oändligt antal lösningar.
- (4p) Låt nu linjerna ges av $L_1: x_1 + 2x_2 - 3 = 0$, $L_2: x_1 - x_2 - 2 = 0$ och $L_3: 2x_1 - x_2 - 2 = 0$. Visa att systemet saknar unik lösning.
- (6p) Hitta den bästa lösningen till detta överbestämda system. Dvs den lösning som minimerar "felvektorn" $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$.

6) Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- (3p) Visa att systemet har en unik lösning.
- (7p) Beräkna A^{-1} och lös ekvationssystemet.

7) (10p) Antag att $\lambda_1 = 5$ och $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\lambda_2 = 7$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ är två par av egenvärden och egenvektorer till en matris A . Låt f vara en linjär avbildning med avbildningsmatris A . Bestäm matrisen A .

(tips: Vad är $f(\mathbf{v})$ om $\mathbf{v}$ är egenvektor.)

Lycka till!

/MA