Föreläsning 13. Hypotesprövning med hjälp av konfidensintervaller

Motiverande exempel. Tyngdacceleration g är mellan 9.78 och $9.83\frac{m}{s^2}$ beroende på position. Man påstår att i centrala Göteborg $g = 9.81520$. Med hjälp av $n = 20$ mättningar inom MVF26 pröva nollhypotesen $H_0 : g = 9.81520$ mot $H_1 : g \neq 9.81520$.

Ett stickprovs t-test

Vi antar att vektor $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ består av n oberoende slumpvariabler med samma normal fördelning $\mathrm{N}\,(\mu, \sigma)$. Ett stickprov $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ är en given realisering (bland flera möjliga) av slumpvektorn $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Vi vill prova nollhypotes

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

mot den tvåsidiga mothypotesen

$$H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

För att skilja mellan H_0 och H_1 vi använder teststatistika

$$t = \tfrac{\bar{x}-\mu_0}{s_{\bar{x}}}.$$

Under H_0 vi vet den exakta nollfördelningen

$$T \overset{H_0}{\sim} \mathrm{t}(n-1).$$

Vi förkastar H_0 till fördel av H_1 om teststatistika t ligger i kritiskt område

$$|\tfrac{\bar{x}-\mu_0}{s_{\bar{x}}}| \geq \mathrm{t}_{\alpha/2}(n-1).$$

Med andra ord vi förkastar H_0 till fördel av H_1 om μ_0 ligger utanför konfidensintervall för μ. Signifikansnivå av denna statistiska test är

$$\alpha = \mathrm{P}(\text{förkasta } H_0 | H_0 \text{ är giltig}).$$

Typiska värden för signifikansnivå α är 1% eller 5%.
Signifikanstest kontrollerar typ 1 fel vid nivå α:

typ I fel: förkasta H_0 medan H_0 är sant,
typ II fel: inte förkasta H_0 medan H_1 är sant.

Det går inte kontrollera båda feltyper för ett givet stickprov, man prioriterar kontrollera typ I fel som mer viktigt:

hellre fria än fälla.

Ett stickprovs t-test för väntevärdesskillnad

Vi vill prova nollhypotes

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

mot den tvåsidiga mothypoteset

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2.$$

Det är samma som testa

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \qquad \text{mot} \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0.$$

Här använder vi teststatistika

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_d/\sqrt{n}}.$$

Om konfidensintervall $I_{\mu_1-\mu_2}$ för stickprov-i-par täcker inte 0 då förkastar vi H_0.

Hypotesprövning om populations andel

Vi testar

$$H_0 : p = p_0 \qquad \text{mot} \qquad H_1 : p \neq p_0$$

med hjälp av approximativ konfidensinterval I_p för p. Om p_0 ligger utanför I_p vi förkastar H_0.

Den respektive teststatistika är

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$$

och kritiska området

$$|z| \geq z_{\alpha/2}.$$

Två stickprovs t-test

Två oberoende stickprov från två normalfördelningar med samma okänd σ. Vi vill prova nollhypotes

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

mot den tvåsidiga mothypoteset

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2.$$

Om konfidensintervall $I_{\mu_1 - \mu_2}$ täcker inte 0 då förkastar vi H_0.