

Tentamen i LGMA40/L9MA45, 15/1 2016, 8.30-12.30

Matematiska Vetenskaper, Göteborgs universitet

Examinator och telefonvakt: Elin Götmark (070-6787423)

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Lös differentialekvationen (3p)

$$x^2 y' + y = 1 \quad y(1) = 0.$$

2. Lös differentialekvationen (3p)

$$y'' + 2y' - 3y = e^x.$$

3. Vid en sjö med volymen  $10^7 \text{ m}^3$  vatten startas en fabrik, som släpper ut en ny förorening i sjön med hastigheten  $100 \text{ g/dygn}$ . Sjön har också ett utlopp där vatten rinner ut med hastigheten  $10^4 \text{ m}^3/\text{dygn}$ . Antag att sjöns vatten alltid är blandat och att sjön alltid innehåller samma volym vatten. Sätt upp en differentialekvation (med begynnelsevillkor) för mängden förorening i sjön. (2p)

4. Är följande serier konvergenta eller divergenta? Om de är konvergenta, beräkna summan om det är möjligt.

$$a) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{3}{(-2)^k} \quad (2p) \quad b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^{2k}} \quad (2p)$$

5. Ta fram Taylorutvecklingen av ordning 2 till  $f(x) = \arctan(2x)$  kring  $x = 0,5$ . Ange resttermen på Lagrangeform. (3p)

6. Visa olikheten (3p)

$$\left| \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} \right| \leq \frac{x^2}{8}$$

för  $x \geq 0$ .

7. Rita upp kägelsnittet  $4x^2 + 3 = 8x + y^2$ . Är det en hyperbel ska du också rita upp asymptoterna. (3p)

8. Vilken typ av kvadratisk yta (sadelyta, skål, etc...) är  $z = x^2 + 2xy + y^2$ ? Rita också upp de nya axlarna (dvs axlarna för de nya variabler som gör att den kvadratiske formen inte har någon blandad term) jämfört med de gamla. (3p)