Lösningar till tenta 16/1 2015

LGMA40/L9MA45, Elin Götmark

1. $y' + \frac{2xy}{x^2+1} - 1 = 0$

$$y' + \frac{2x}{x^2+1} y = 1$$

Hitta integrerande faktor: $\int \frac{2x}{x^2+1} dx =$

$= \ln(x^2+1)$.

Multiplicera ekvationen med $e^{\ln(x^2+1)} = x^2+1$.

$$\underbrace{(x^2+1)y' + 2xy}_{((x^2+1)y)'} = x^2+1$$

$$((x^2+1)y)' = x^2+1$$

$$(x^2+1)y = \int (x^2+1)dx = \frac{x^3}{3} + x + C$$

$$y = \frac{x^3/3 + x + C}{x^2+1}$$

2. Homogen lösning: $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Karakteristiskt polynom är $r^2 + 2r + 5 = 0$

$r = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$

så $y_h = e^{-x}(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x))$

Partikulär lösning: vill lösa $y'' + 2y' + 5y = 5\sin(x)$

Ansätt
$$y_p = A\sin(x) + B\cos(x)$$
$$y_p' = A\cos(x) - B\sin(x)$$
$$y_p'' = -A\sin(x) - B\cos(x)$$

$$y_p'' + 2y_p' + 5y_p = -A\sin(x) - B\cos(x) + 2A\cos(x)$$
$$-2B\sin(x) + 5A\sin(x) + 5B\cos(x) =$$
$$\underbrace{(4A-2B)}_{=5}\sin(x) + \underbrace{(4B+2A)}_{=0}\cos(x) = 5\sin(x)$$

$$\begin{cases} 4A - 2B = 5 \\ 4B + 2A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4A - 2B = 5 \\ A = -2B \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4(-2B) - 2B = -10B = 5 \quad \Rightarrow B = -\frac{1}{2}, A = 1$$

Så $y_p = \sin(x) - \frac{\cos(x)}{2}$

Totalt: $y = y_h + y_p =$
$$= e^{-x}(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)) + \sin(x) - \frac{\cos(x)}{2}$$

$$y' = e^{-x}(-2C_1\sin(2x) + 2C_2\cos(2x)) - e^{-x}(C_1\cos(2x) + $$
$$+ C_2\sin(2x)) + \cos(x) + \frac{\sin(x)}{2}$$

$$\begin{cases} y(0) = C_1 - \frac{1}{2} = 0 \\ y'(0) = 2C_2 - C_1 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}$$
$$2C_2 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow C_2 = -\frac{1}{4}$$

Så $y = e^{-x}\left(\frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4}\sin(2x)\right) + \sin(x) - \frac{\cos(x)}{2}$

(3.) Sätt $y(t)$ = populationens storlek vid tiden t.
Då är $y' = Cy(y-K)$.

(4.) (a.) $\frac{e^k}{k} \to \infty$ när $k \to \infty$, alltså går inte termerna i serien mot noll. Serien är divergent.

(b.) Vi jämför med integralen $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx =$
$= \lim_{X\to\infty} \left[\arctan(x)\right]_1^X = \lim_{X\to\infty} \arctan(X) - \arctan(1) =$
$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$. Serien är alltså konvergent (men vi vet inte vad summan är).

(5.) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + B_1(x)x^4$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + B_2(x)x^3$

$$\frac{x - \ln(1+x)}{\cos(x) - 1} = \frac{x - (x - \frac{x^2}{2} + B_2(x)x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + B_1(x)x^4 - 1} = \frac{\frac{x^2}{2} - B_2(x)x^3}{-\frac{x^2}{2} + B_1(x)x^4} =$$

$$= \frac{1 + B_3(x)x}{-1 + B_4(x)x^2} \to -1 \quad \text{när } x \to \infty$$

(6.) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{e^{\theta x}}{n!} x^n$ där $0 \leq \theta \leq 1$

Vi observerar först att $e^{-0,1\cdot\theta} \leq 1$,
så vi kan uppskatta resttermen med

$$\left| \frac{e^{-0,1\cdot\theta}}{n!} (-0,1)^n \right| \leq \frac{0,1^n}{n!}.$$

Så $e^{-0,1} = 1 - 0,1 + \frac{0,01}{2} \pm \frac{0,001}{6} =$

$= 0,9 + 0,005 \pm 0,000166\ldots =$

$= 0,905 \pm 0,000166\ldots$

Så om vi avrundar $e^{-0,1}$ till tre decimaler
kommer svaret bli $\underline{\underline{0,905}}$.

(7.) $y^2 + 2y - 2x^2 + 8x = (y+1)^2 - 1 - 2(x-2)^2 + 8$

Kägelsnittets ekvation blir $(y+1)^2 - 2(x-2)^2 = 2$

Det är centrerat i $(-1, 2)$.

Var är asymptoterna?

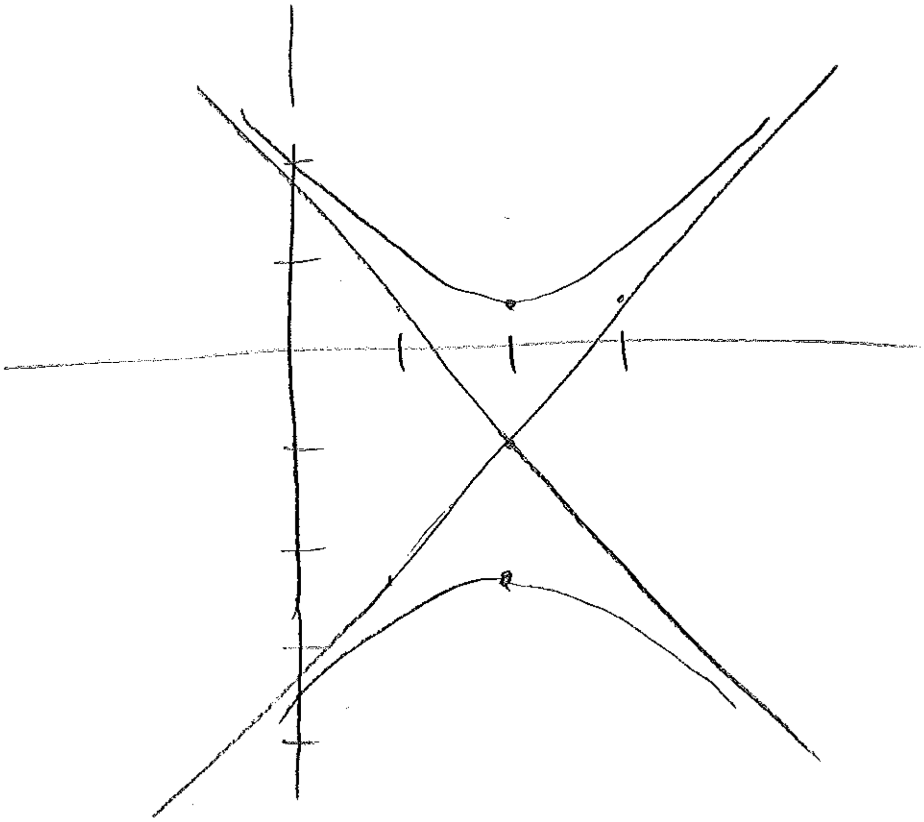
$(y+1)^2 = 2 + 2(x-2)^2$

$y+1 = \sqrt{2x^2 - 8x + 10} \approx \sqrt{2}\,x$

Så asymptoterna är $y = -1 \pm \sqrt{2}\,x$

Om $x = 2$ är $(y+1)^2 = 2$, dvs

$y = -1 \pm \sqrt{2}$, så kurvan går genom $(2, -1 \pm \sqrt{2})$



(8.) $x^2+2xy+y^2 = [x\ y]\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$

Vi räknar ut egenvärdena hos matrisen.

$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^2-1 = 1-2\lambda+\lambda^2-1 =$

$= \lambda^2-2\lambda = \lambda(\lambda-2) = 0$.

Egenvärdena är $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$.

Då finns nya variabler, säg (t_1, t_2), så att

$x^2+2xy+y^2 = 2t_2^2$.

Ytan $z = 2t_2^2$ är en "ränna":