Lösningar Tenta 14/4 2015

LGMA40/L9MA45

Elin Gömark

(1.) Vi kan antingen se direkt att VL $= ((1+x)y)'$, eller så kan vi hitta integrerande faktor. Vi har:

$$(1+x)y' + y = 1+x$$

$$y' + \frac{1}{1+x}y = 1.$$

Integrerande faktor blir $e^{\int \frac{1}{1+x}dx} = e^{\ln|1+x|} = |1+x| = 1+x$. Då får vi tillbaka

$$((1+x)y)' = 1+x$$

$$(1+x)y = \int 1+x\,dx = x + \frac{x^2}{2} + C.$$

Lösningen blir då $y = \dfrac{x + x^2/2 + C}{1+x}$.

(2.) Ekvationen är separabel:

$$\frac{dy}{dx} = xy\cos(x)$$

$$\frac{dy}{y} = x\cos(x)\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x\cos(x)\,dx$$

$$\ln|y| = x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx \leftarrow \text{partiell integration}$$

$$\ln|y| = x\sin(x) + \cos(x) + C$$

$$|y| = e^{x\sin(x)+\cos(x)+C}$$

$$y = D \cdot e^{x\sin(x)+\cos(x)} \quad \text{där } D \in \mathbb{R}.$$

Sätt in $x = 0$:

$1 = y(0) = D \cdot e^{0+1} = D \cdot e.$

Då är $D = e^{-1}$, och lösningen blir

$$\underline{\underline{y = e^{x\sin(x) + \cos(x) - 1}}}.$$

(3.) Låt den konstanta accelerationen framåt vara a, och låt båtens hastighet vara $v(t)$. Vi vet att accelerationen då blir $v'(t)$. Ekvationen blir då:

$v'(t) = a - k(v(t))^2$ där k är proportionalitetskonstanten.

(4.) (a.) Detta är en geometrisk summa.

Vi har: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4 \cdot 3^k} = -\frac{1}{4 \cdot 3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{3^{k-1}} =$

$\displaystyle = -\frac{1}{12} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = -\frac{1}{12} \frac{1}{1-(-\frac{1}{3})} = -\frac{1}{12} \frac{1}{1+\frac{1}{3}} =$

$\displaystyle = -\frac{1}{12} \frac{3}{3+1} = \underline{\underline{-\frac{1}{16}}}.$ Summan är konvergent och detta är dess värde.

(b.) Vi använder integralkriteriet. Summan $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{1+k^2}$ är konvergent om och endast om integralen $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$ är konvergent.

Vi har: $\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^{\infty} =$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{R\to\infty} \ln(1+R^2)}\; - \ln(1).$$

Denna existerar inte, eftersom $\ln(1+R^2) \to \infty$ när $R \to \infty$. Alltså är varken integralen eller summan konvergent.

(5.) Vi behöver f:s derivator:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{1\cdot\sqrt{1+x^2} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Vi sätter in $x = 1$:

$$f(1) = \sqrt{2} \qquad f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad f''(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Då är Taylorpolynomet: $\sqrt{2} + \frac{x-1}{\sqrt{2}} + \frac{(x-1)^2}{4\sqrt{2}}$.

(6.) MacLaurinutvecklingen av $\ln(x+1)$ är

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3\cdot(1+\theta x)^3} \quad \text{där } 0 \le \theta \le 1.$$

Då är $\left|\ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}\right| = \left|\frac{x^3}{3(1+\theta x)^3}\right| \le \frac{x^3}{3}$,

eftersom $(1+\theta x)^3 \ge 1$ när $0 \le \theta \le 1$ och $0 \le x \le 1$.

(7.) Vi ser att kägelsnittet är en hyperbel med centrum i $(0,1)$. Då är ekvationen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1$$ (eftersom kurvan inte skär y-axeln).

Vi bestämmer a och b genom att sätta in punkterna:

$$\frac{2^2}{a^2} - \frac{(1-1)^2}{b^2} = 1 \iff \frac{4}{a^2} = 1 \iff a = \pm 2.$$

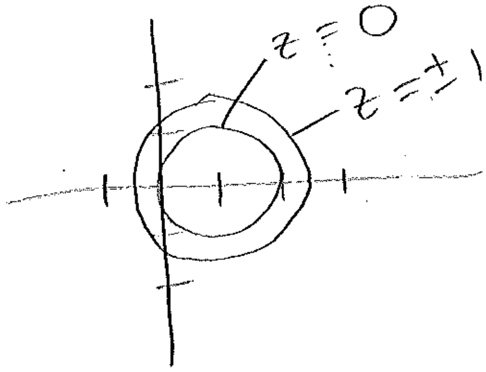
Den andra punkten ger då

$$\frac{(2\sqrt{2})^2}{4} - \frac{(0-1)^2}{b^2} = 1 \iff \frac{8}{4} - \frac{1}{b^2} = 1 \iff b = \pm 1$$

Ekvationen är alltså $\underline{\underline{\frac{x^2}{4} - (y-1)^2 = 1}}$.

(8.) Nivåkurvan till $z = -1$ är:

$$x^2 - 2x + y^2 = 1 \iff \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} + y^2 = 2$$



$$\iff (x-1)^2 + y^2 = 2.$$

Nivåkurvan till $z = 1$ är likadan. Om vi sätter $z = 0$ får vi

$$x^2 - 2x + y^2 = 0 \iff (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Om vi ökar z till ± 2, ± 3 osv får vi cirklar med större och större radier. Hela ytan blir då: