Lösningar tenta LGMA40/L9MA45

20/8 2015 Elin Götmark

1. Vi hittar först lösningen y_h till den homogena ekvationen $y'' - 4y = 0$.

Den karakteristiska ekvationen är

$r^2 - 4 = 0 \iff r^2 = 4 \iff r = \pm 2$,

så $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$.

Vi tar fram en partikulärlösning i två steg; först löser vi $y'' - 4y = 1$. Vi ser att lösningen blir $y_{p_1} = -\frac{1}{4}$ (eftersom $y_{p_1}'' = 0$).

Sedan löser vi $y'' - 4y = e^x$. Vi gör ansättningen $y_{p_2} = k \cdot e^x$. Då är $y_{p_2}' = y_{p_2}'' = k \cdot e^x$,

och $y_{p_2}'' - 4y_{p_2} = ke^x - 4ke^x = -3ke^x = e^x$,

så att $-3k = 1$ och $k = -\frac{1}{3}$.

Då är $y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} =$

$= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{4} - \frac{e^x}{3}$

Vi bestämmer C_1 och C_2: $y(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = 0$

$y'(x) = 2C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-2x} - \frac{e^x}{3}$

$y'(0) = 2C_1 - 2C_2 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$, så $C_1 = C_2$

Vi får $2C_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$, så $C_1 = C_2 = \frac{7}{24}$.

Då är $y = \frac{7}{24}(e^{2x} + e^{-2x}) - \frac{1}{4} - \frac{e^x}{3}$

2. $x^2y' + y' = \sqrt{y} \iff (x^2+1)\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} \iff$

$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{x^2+1} \iff \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{dx}{x^2+1} \iff$

$2\sqrt{y} = \arctan(x) + C$

$\sqrt{y} = \frac{1}{2}(\arctan(x) + C)$.

Så $\underline{y = \frac{1}{4}(\arctan(x) + C)^2}$

3. Sätt $y(t)$ = vattendjupet vid tiden t, mätt i meter. Ekvationen blir

$\underline{y'(t) = k \cdot \sqrt{y(t)}}$ och begynnelse villkoret

$\underline{y(0) = 2}$.

4. a. Vi använder integralkriteriet.

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{1-k}$ konv. $\iff \int_2^{\infty} \frac{1}{1-x}\,dx$ konv.

$\int_2^{\infty} \frac{1}{1-x}\,dx = \left[-\ln|1-x|\right]_2^{\infty} =$

$= \underbrace{\lim_{R\to\infty} -\ln|1-R|}_{=-\infty} + \underbrace{\ln|1-2|}_{=\ln|-1| = \ln 1 = 0}$.

Så integralen är divergent, och serien är alltså också $\underline{\text{divergent}}$.

(b.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^{k+1}}{3^k} = \pi \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^k$.

Detta är en geometrisk serie, och eftersom $\frac{\pi}{3} > 1$ så är den divergent.

(5.) Vi vet att $e^x = 1 + x + B_1(x) \cdot x^2$

och $\arctan(x) = x + B_2(x) x^3$.

(Om vi inte kommer ihåg det senare kan vi räkna ut det genom

$f(x) = \arctan(x)$ $\quad f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad f'(0) = 1$

$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ $\quad f''(0) = 0$.)

Så
$$\frac{x - xe^x}{\arctan(x) - x} = \frac{x - x(1 + x + B_1(x)x^2)}{x + B_2(x)x^3 - x} =$$
$$= \frac{-x^2 - B_1(x)x^3}{B_2(x)x^3} = \frac{-1 - B_1(x)x}{B_2(x)x}.$$

När $x \to 0$ kommer täljaren att $\to -1$ och nämnaren $\to 0$.

Alltså existerar inte gränsvärdet.

(6.) $f(x) = \ln(2+x^2)$ $\quad f(-1) = \ln(3)$

$f'(x) = \frac{2x}{2+x^2}$ $\quad f'(-1) = -\frac{2}{3}$

$$f''(x) = \frac{2(2+x^2) - 2x \cdot 2x}{(2+x^2)^2} = \frac{4-2x^2}{(2+x^2)^2} \quad f''(-1) = \frac{2}{9}$$

$$f'''(x) = \frac{-4x(2+x^2)^2 - 4x(2+x^2)(4-2x^2)}{(2+x^2)^4} =$$

$$= \frac{-4x(2+x^2) - 4x(4-2x^2)}{(2+x^2)^3} = \frac{4x^3 - 24x}{(2+x^2)^3}.$$

Då är

$$\ln(2+x^2) = \ln(3) - \frac{2}{3}(x+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}(x+1)^2 +$$
$$+ \frac{1}{6}\cdot\frac{4\xi^3 - 24\xi}{(2+\xi^2)^3}(x+1)^3$$

där ξ ligger mellan x och -1.

7. $16x^2 + 64x + 61 = 2y - y^2 \iff$

$$16x^2 + 64x + y^2 - 2y + 61 = 0$$

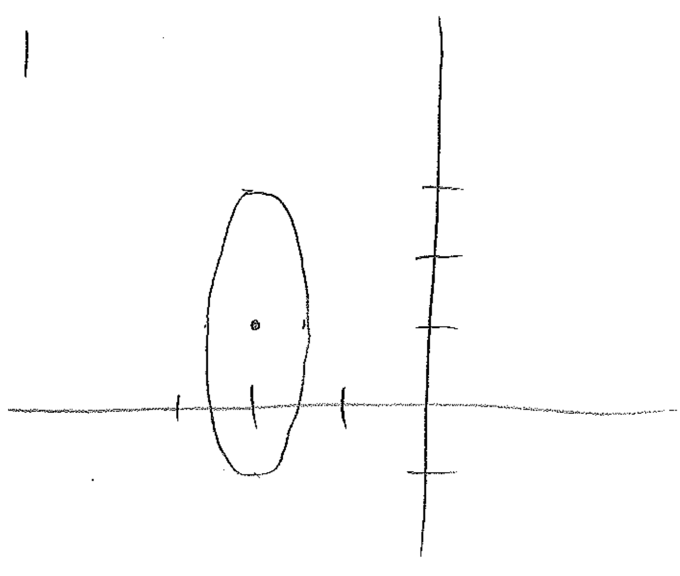
Vi kvadratkompletterar:

$$16x^2 + 64x = 16(x^2 + 4x) = 16(x+2)^2 - 64$$
$$y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1.$$

Ekvationen blir då:

$$16(x+2)^2 + (y-1)^2 - 64 - 1 + 61 = 0$$
$$16(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$$
$$4(x+2)^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$
$$\frac{(x+2)^2}{(1/2)^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1$$

Detta är en ellips med centrum i $(-2,1)$ och halvaxel $\frac{1}{2}$ i x-led och halvaxel 2 i y-led.



(8) Matrisen som hör till den kvadratiska formen $Q(x,y) = 2x^2 + 12xy - 7y^2$ är $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$. Vi räknar ut egenvärdena till matrisen:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 6 \\ 6 & -7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(-7-\lambda) - 36 = \lambda^2 + 5\lambda - 50.$$

Då är $\lambda = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 50} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{225}{4}} =$

$= -\frac{5}{2} \pm \frac{15}{2}$, så $\lambda_1 = \frac{10}{2} = 5$ och

$\lambda_2 = -\frac{20}{2} = -10$.

Då finns ett variabelbyte s, t så att $Q(x,y) = 2x^2 + 12xy - 7y^2 =$

$= 5s^2 - 10t^2$ vilket betyder att ytan är én sadelyta.