Lösningar till tentan i LGMA40/L9MA45
15/1 2016 Elin Götmark

1. Skriv först om på standardform:

$y' + \frac{1}{x^2} y = \frac{1}{x^2}$. Vi tar fram integrerande faktor: $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$. I.f. är då $e^{-\frac{1}{x}}$, och vi multiplicerar ekvationen med det: $e^{-\frac{1}{x}} y' + \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} y = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$. $\Leftrightarrow$

$\left(e^{-\frac{1}{x}} y\right)' = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$. Då är

$$e^{-\frac{1}{x}} y = \int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}\,dx = e^{-\frac{1}{x}} + C.$$

(Ser man inte det direkt kan man först byta variabel till $t = -\frac{1}{x}$.)

Då är $y = 1 + Ce^{\frac{1}{x}}$. Vi bestämmer konstanten: $y(1) = 1 + Ce = 0 \Longrightarrow$

$C = -\frac{1}{e}$. Då är $y = 1 - e^{-1} \cdot e^{\frac{1}{x}} =$

$= \underline{1 - e^{\frac{1}{x} - 1}}$.

2. Vi hittar först den homogena lösningen. Den karakteristiska ekvationen är

$r^2 + 2r - 3 = 0$, så $r = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$,

dvs $r_1 = -3$ och $r_2 = 1$.

Då är $y_h = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$.

Nu vill vi hitta en partikulär lösning.

Eftersom HL förekommer som term i y_h sätter vi $y_p = z(x)e^x$. Då får vi

$y_p' = e^x(z+z')$ och $y_p'' = e^x(z+2z'+z'')$.

Insättning i ekvationen ger

$e^x(z+2z'+z'') + 2e^x(z+z') - 3ze^x = e^x$.

Vi delar med e^x och får:

$z'' + 4z' = 1$. En lösning till detta är $z = \frac{x}{4}$, så $y_p = \frac{xe^x}{4}$. Då är

$$y = y_h + y_p = \underline{C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + \frac{xe^x}{4}}.$$

(Ett alternativt sätt att hitta y_p är att sätta $y_p = Axe^x$.)

3. Låt $y(t)$ = mängden förorening i sjön i gram vid dygn t. Då är $y(0) = 0$.

Varje dygn tillförs 100 g, och det försvinner $\frac{10^4}{10^7} \cdot y(t)$ g. Så $\underline{y'(t) = 100 - 10^{-3} y(t)}$.

4. a. Detta är en geometrisk summa, som är konvergent eftersom $\left|-\frac{1}{2}\right| \leq 1$.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3}{(-2)^k} = \frac{3}{(-2)^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(-2)^{k-2}} = \frac{3}{(-2)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-2)^k} =$$

$$= \frac{3}{(-2)^2} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3/2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

b. Vi använder integralkriteriet.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^{2k}}$ är konvergent $\Longleftrightarrow$

$\int_1^{\infty} \frac{x}{e^{2x}}\,dx$ är konvergent.

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{e^{2x}}\,dx = \int_1^{\infty} x e^{-2x}\,dx = \left\{ \begin{matrix} \text{partial-} \\ \text{bråksuppd.} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left[x \frac{e^{-2x}}{-2} \right]_1^{\infty} - \int_1^{\infty} 1 \cdot \frac{e^{-2x}}{-2}\,dx =$$

$$= \underbrace{\lim_{R \to \infty} R \frac{e^{-2R}}{-2}}_{=0} + \frac{e^{-2}}{-2} - \left[\frac{e^{-2x}}{(-2)^2} \right]_1^{\infty} =$$

$$= \frac{e^{-2}}{-2} - \underbrace{\lim_{R \to \infty} \frac{e^{-2R}}{4}}_{=0} + \frac{e^{-2}}{4}$$

Alltså konvergent!

5. I allmänhet gäller:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^3$$

där ξ ligger mellan a och x.

I vårt fall är $a = 0,5$ och $f(x) = \arctan(2x)$.

$$f(0,5) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot 2 = \frac{2}{1+4x^2} \qquad f'(0,5) = \frac{2}{1+1} = 1$$

$$f''(x) = -\frac{2}{(1+4x^2)^2} \cdot 8x = -\frac{16x}{(1+4x^2)^2} \quad f''(0,5) = -\frac{8}{(1+1)^2} = -2$$

$$f'''(x) = \frac{-16(1+4x^2)^2 - 2(1+4x^2) \cdot 8x \cdot (-16x)}{(1+4x^2)^4} =$$

$$= \frac{-16(1+4x^2) - 16 \cdot 16x^2}{(1+4x^2)^3} =$$

$$= \frac{-16(1-20x^2)}{(1+4x^2)^3}$$

Så

$$\arctan(2x) = \frac{\pi}{4} + (x-0,5) - (x-0,5)^2 + \\ - \frac{16(1-20\xi^2)}{(1+4\xi^2)^3} \cdot \frac{(x-0,5)^3}{3!}$$

där ξ ligger mellan $0,5$ och x.

(6.) Vi Taylorutvecklar $\sqrt{1+x}$ kring $a=0$: om $f(x)=\sqrt{1+x}$ är

$f(0)=1$

$f'(x)=\frac{1}{2(1+x)^{1/2}}$ $\quad f'(0)=\frac{1}{2}$

$f''(x)=-\frac{1}{4(1+x)^{3/2}}$.

Så $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{1}{4(1+\xi)^{3/2}}\frac{x^2}{2}$,

där $0\leq\xi\leq x$.

$$\left|\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}\right|=\left|\frac{1}{4(1+\xi)^{3/2}}\frac{x^2}{2}\right|=$$

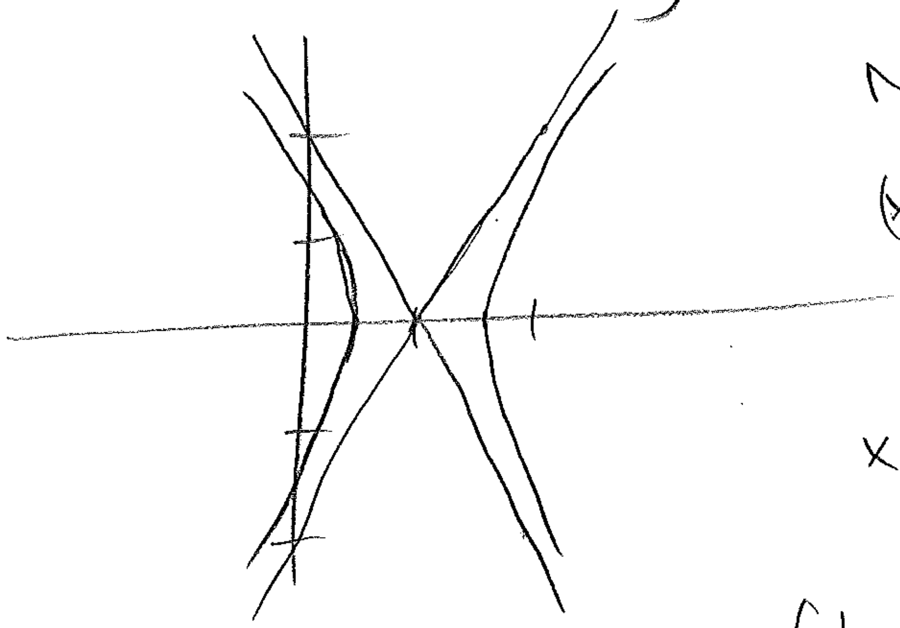
$$=\frac{x^2}{8}\left|\underbrace{\frac{1}{(1+\xi)^{3/2}}}_{\leq 1,\text{ när } \xi=0 \text{ och } x\geq 0.}\right|\leq\frac{x^2}{8}$$

(för andra ξ blir det mindre).

(7.) $4x^2+3=8x+y^2 \iff$

$\underbrace{4x^2-8x}_{4(x^2-2x)=4((x-1)^2-1)}-y^2+3=0 \iff 4(x-1)^2-4-y^2+3=0$

$\iff \frac{(x-1)^2}{1/4}-y^2=1$ Detta är en hyperbel centrerad i $(1,0)$ och med $a=\frac{1}{2}$ och $b=1$. Den har då asymptoter med lutning $\pm\frac{b}{a} = \pm\frac{1}{1/2} = \pm 2$.



När $y = 0$ är $(x-1)^2 = \frac{1}{4}$ dvs $x = 1 \pm \frac{1}{2}$.

(8.) $z = x^2 + 2xy + y^2 = [x\ y]\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Vi diagonaliserar A, och bestämmer då först egenvärdena:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 =$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2).$$ Så $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$.

Nu bestämmer vi egenvektorerna.

$\underline{\lambda_1 = 0}$: $(A - 0 \cdot I)\cdot \mathbb{x} = \mathbb{O} \iff$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, så

$x = -y$ och vi kan välja $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\underline{\lambda_2 = 2}$: $(A - 2I)\cdot \mathbb{x} = \mathbb{O} \iff \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, så $x = y$ och vi kan välja $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Då är $x^2+2xy+y^2 = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T P D P^T \mathbf{x}$

där $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ och $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

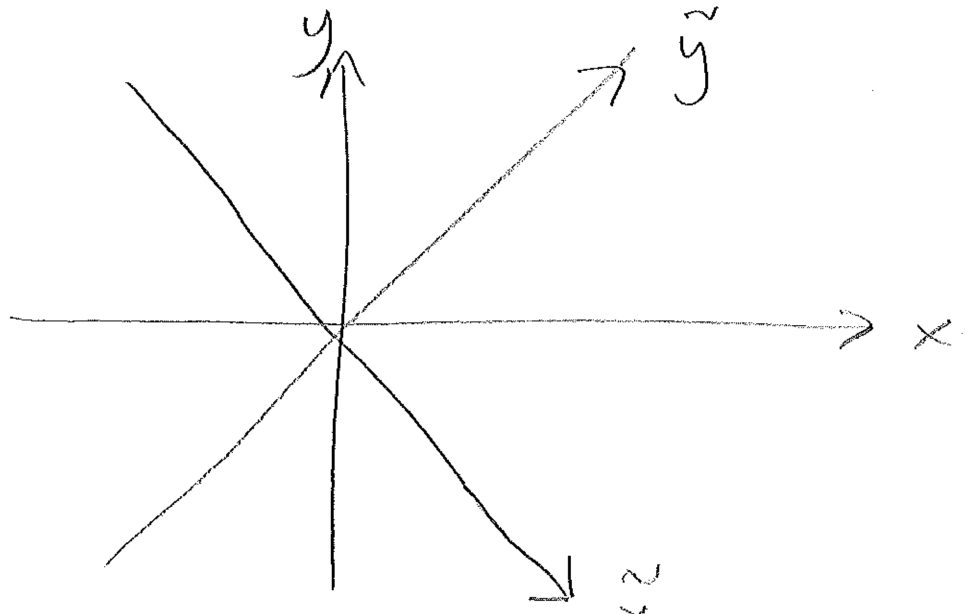
Sätt $\tilde{\mathbf{x}} = P^T \mathbf{x}$, och $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}$.

$x^2+2xy+y^2 = \tilde{\mathbf{x}}^T D \tilde{\mathbf{x}} = 0\cdot\tilde{x}^2 + 2\tilde{y}^2 = 2\tilde{y}^2$.

Detta är en "ränna" som pekar utmed $\tilde{x}$-axeln.

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} x-y \\ x+y \end{bmatrix}.$$

Så $\begin{cases} \tilde{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \\ \tilde{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y). \end{cases}$



$\oplus$