Lösningar Tenta LGMA40

Elin Götmark 5/4 2016

(1.) $y^2 = \frac{y'}{\ln(x)} \iff \ln(x)\,dx = \frac{dy}{y^2}$

$\int \ln(x)\,dx = \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} + C$

$\int \ln(x)\,dx = \left\{\begin{matrix}\text{partiell}\\ \text{integration}\end{matrix}\right\} = x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx =$

$= x\ln(x) - x + C$

Så $-\frac{1}{y} = x\ln(x) - x + C$

$$y = -\frac{1}{x\ln(x) - x + C}$$

(2.) $y' = x + 2xy \iff y' - 2xy = x$

Integrerande faktor ges av $\int -2x\,dx = -x^2$, så ekvationen ska multipliceras med

e^{-x^2}: $\quad e^{-x^2}y' - 2xe^{-x^2}y = xe^{-x^2} \iff$

$(y \cdot e^{-x^2})' = xe^{-x^2} \iff ye^{-x^2} = \int xe^{-x^2}\,dx =$

$= -\frac{1}{2}\int -2xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$

Så $y = -\frac{1}{2} + Ce^{x^2}$

3. $y'(t) = k \cdot y(t) \cdot (10000 - y(t))$,

eftersom antalet friska människor ges av $10000 - y(t)$. Begynnelsevillkoret är

$y(0) = 1$.

4. a. Serien är geometrisk, och $\left|\frac{2}{-3}\right| \leq 1$, så den är konvergent.

$$\sum_{k=1}^{\infty} 5\left(\frac{2}{-3}\right)^k = 5 \cdot \frac{2}{-3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{-3}\right)^k = 5 \cdot \frac{2}{-3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{-3}} =$$

$$= \frac{10}{-3} \cdot \frac{1}{5/3} = \underline{\underline{-2}}.$$

b. $\frac{k}{k+1} = \frac{1}{1 + 1/k} \to 1$ när $k \to \infty$.

Eftersom termerna inte $\to 0$ så är serien divergent enligt sats.

(Sorry, det blev fel ordning, uppg. 5 kommer på slutet.)

6. Vi vet att

$$\arctan(t) = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + O(t^7),$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7),$$

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + O(x^{14}).$$

Sätt nu $t = \sin(x^2)$. Då är

$$\arctan(\sin(x^2)) = \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + O(x^{14})\right) -$$

$$\frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + O(x^{14})\right)^3 + \frac{1}{5}\left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + O(x^{14})\right)^5 + O(x^{14}).$$

Vi samlar koefficienterna framför de olika potenserna av x:

x^2: 1

x^6: $-\frac{1}{3!} + \frac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ — från andra parentesen

x^{10}: $\frac{1}{5!} - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3!} \cdot 3 + \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{120} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} =$

från andra parentesen, där i har $x^2 \cdot x^2 \cdot \frac{x^6}{3!} \cdot 3$

$$= \frac{1}{6 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} =$$

$$= \frac{1 - 4 \cdot 5 + 6 \cdot 4}{6 \cdot 4 \cdot 5} =$$

$$= \frac{1 - 20 + 24}{120} = \frac{5}{120} = \frac{1}{24}$$

Svar: Maclaurinpolynomet av grad 10 är

$$x^2 + \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{24}.$$

7. Kägelsnittet är en parabel på formen $x = a + k(y-b)^2$.

Eftersom kurvan vänder i $(1,-2)$ ser vi att $a = 1$ och $b = -2$. Då har vi $x = 1 + k(y+2)^2$. Sätt nu in $x = 2$, $y = 0$: $2 = 1 + k \cdot 4$

$\Leftrightarrow 4k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$

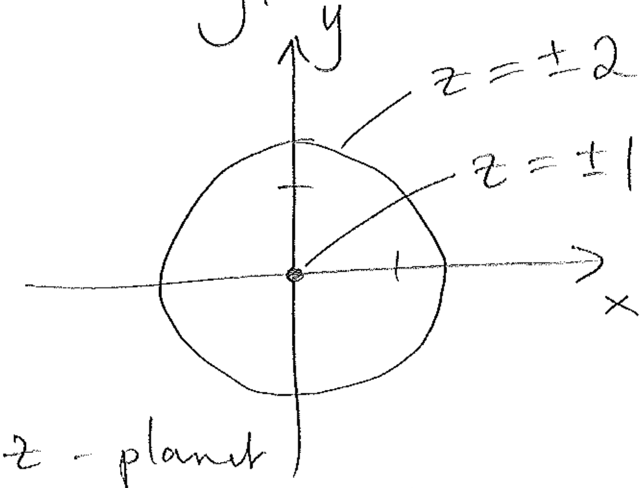
Svar: $x = 1 + \frac{1}{4}(y+2)^2$

(8.) Vi tittar på nivåytorna:

$z = \pm 2$: $4 - x^2 - y^2 = 1 \iff x^2 + y^2 = 3$

$z = \pm 1$: $1 - x^2 - y^2 = 1 \iff x^2 + y^2 = 0$ dvs $(x,y) = (0,0)$

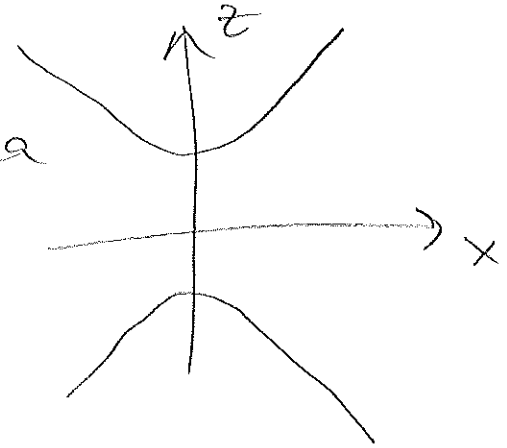
$z = 0$: $-x^2 - y^2 = 1$, saknar lösning.



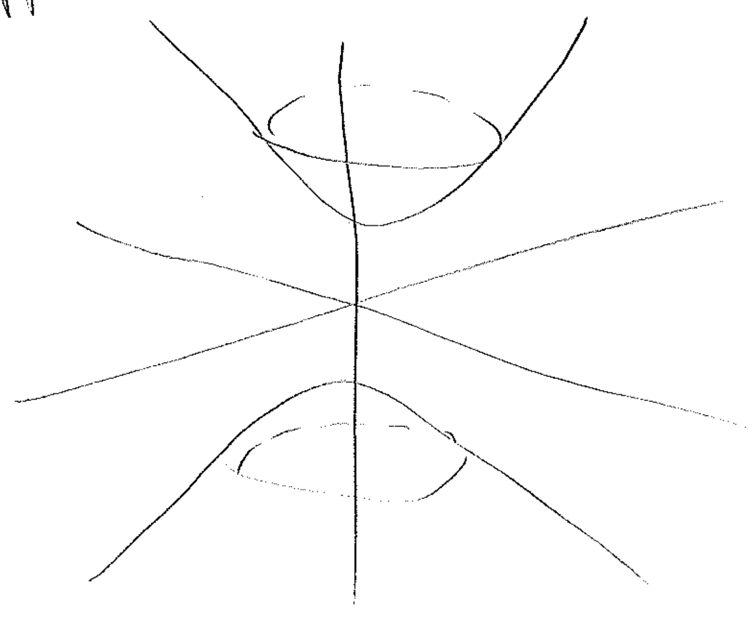
När $|z|$ växer så växer radien på nivåkurvan, som är en cirkel (om $|z| > 1$).

Vi kan också kolla hur skärningen med t ex xz-planet ser ut: sätt $y = 0$, då får vi $z^2 - x^2 = 1$.

Detta är en hyperbel:



Kombinerat med nivåkurvorna ser vi då att vi har två "skålar", varav en är upp-och-ner:



5. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$:

Så $$\frac{\ln(1+x) - x}{\sin(x) - x} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + O(x^3) - x}{x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) - x} =$$

$$= \frac{-\frac{x^2}{2} + O(x^3)}{-\frac{x^3}{6} + O(x^5)} = \frac{-\frac{1}{2} + O(x)}{-\frac{x}{6} + O(x^3)}$$

Täljaren $\longrightarrow -\frac{1}{2}$, och nämnaren $\rightarrow 0$ alltså går bråket som helhet mot oändligheten.

Svar: Gränsvärdet existerar inte.